на отв
801-17
1097

ИГРЫ И ЗАДАЧИ

ОСНОВАННЫЯ

НА МАТЕМАТИКѢ.

СОЧИНЕНІЕ

КЛОДА ГАСПАРА БАШЭ.

РУССКІЙ ПЕРЕВОДЪ СЪ ТРЕТЬЯГО ИЗДАНІЯ,

ИСПРАВЛЕННАГО И ДОПОЛНЕННАГО ПРОФЕССОРОМЪ МАТЕМАТИКИ

А. ЛАБОНОМЪ.





Румянцов. музей. Библіотека

ИЗДАНІЕ КНИГОПРОДАВЦА-ТИПОГРАФА М. О. ВОЛЬФА.

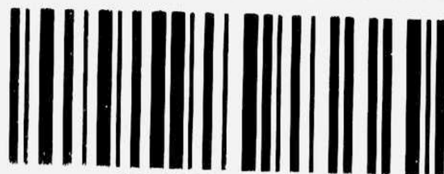
С.-ПЕТЕРБУРГЪ,
Гостиный дворъ, №№ 18, 19 и 20.

МОСКВА,
Кузнецкій мостъ, домъ Третьякова.

1877.

Дозволено цензурою. Спб., 18 февраля 1876 г.

82687-0



Типографія М. О. Вольфа (Спб., Фонтанка, № 59).

ПРЕДИСЛОВІЕ АВТОРА

КО ВТОРОМУ ИЗДАНІЮ.

Одиннадцать лѣтъ прошло уже съ тѣхъ поръ, какъ книга эта была впервые напечатана, когда я хотѣлъ, чтобы она вышла въ свѣтъ, какъ для испытанія моихъ силъ, такъ и для того, чтобы она служила предшественницей моему «Діофанту». Въ настоящее время, когда я увидѣлъ, что этотъ незначительный трудъ принятъ благосклонно лучшими умами Франціи, и что, съ Божьей помощью, «Діофантъ» вышелъ въ свѣтъ и въ свою очередь доставилъ мнѣ за работу мою награду, которой я ожидалъ,—въ настоящее время, мнѣ кажется, я могу съ большей смѣлостью выпустить эту книгу вторымъ изданіемъ и надѣяться на хо-

рошій пріемъ въ виду того, что она теперь лучше выполнена, чѣмъ прежде. Можетъ быть удивитъ кого-нибудь то, что, написавъ такую серьезную и наполненную такими глубокими соображеніями книгу, какъ «Діофантъ», я занялся вещами незначительными и малополезными, заключающимися въ этой книгѣ; но я отвѣчу на это вопервыхъ, что книга—дѣтище нашего ума, и что, кромѣ естественной склонности отцовъ къ своимъ дѣтямъ вообще, отецъ чувствуетъ особенную любовь къ своимъ первенцамъ. Поэтому-то совершенно естественна моя особенная любовь къ этой книгѣ, къ моему первому произведенію, къ первенцу моего ума; совершенно естественно, что я не довольствуюсь выпускомъ ея въ свѣтъ, но забочусь еще о сохраненіи и объ успѣхѣ ея. Впрочемъ я не думаю, чтобы проникшіе въ эту книгу подальше тѣхъ, которые прочли только одно заглавіе ея, приписали ей такъ мало значенія: ибо допустивъ даже, что въ ней заключаются только игры, главная цѣль которыхъ доставлять порядочное развлеченіе и занимать общество своей замысловатостью, нельзя

не признать въ тоже время, что для исполненія этихъ игръ въ совершенствѣ, нужна значительная доза сообразительности и нужно обладать болѣе чѣмъ посредственнымъ знаніемъ ариѳметики, чтобы хорошо понять доказательства и умѣть пользоваться многими прекрасными открытіями, которыя я присовокупилъ.

Остается еще замѣтить читателю, что это второе изданіе гораздо лучше выполнено, чѣмъ первое: кромѣ того, что оно болѣе исправно въ типографскомъ отношеніи, оно дополнено многими задачами и полнымъ доказательствомъ той задачи, которая была пятой въ первомъ изданіи и помѣщена шестой въ настоящемъ. Для этого я заимствовалъ дюжину предположеній изъ моихъ «Eléments arithmétiques», чтобы вставить ихъ сюда, принимая во вниманіе невозможность скораго выпуска въ свѣтъ моей книги объ элементахъ, съ другой же стороны я не могъ допустить, чтобы предлагаемая книга оставалась такъ долго неоконченною.

На вопросъ о томъ, что необходимо для совершеннаго пониманія и выполненія этихъ

задачъ, я отвѣчу, что каждый человѣкъ съ головой можетъ понять и выполнить большую часть ихъ. Правда, нѣкоторыя изъ этихъ задачъ могутъ быть рѣшены въ совершенствѣ только знающими первыя правила ариѳметики. Что-же касается доказательствъ, то они предназначаются для людей болѣе свѣдущихъ, такъ какъ доказательства эти предполагаютъ знакомство съ седьмой, восьмой и девятой книгами Евклида, съ нѣсколькими положеніями во второй книгѣ, примѣненными къ числамъ, и съ нѣсколькими опредѣленіями и предложеніями, помѣщенными въ пятой книгѣ Евклида.

Въ заключеніе прошу тѣхъ, которые пожелаютъ ввести эти игры въ употребленіе и видѣть успѣхъ ихъ, исполнять ихъ такъ ловко, чтобы нельзя было легко открыть ихъ сущность, потому что человѣка особенно плѣняетъ дѣйствіе, причина котораго ему неизвѣстна. Поэтому-то слѣдуетъ при частомъ повтореніи одной и той же игры всегда сообщать ей нѣкоторое разнообразіе, исполняя ее въ различныхъ видахъ. Остается только прибавить

къ этимъ предварительнымъ замѣчаніямъ, что доказательства помѣщены у меня, и поэтому ихъ должно читать внимательно и толково.

ЗАДАЧА I.

Угадать кѣмъ-нибудь задуманное число.

Предложи задуманное число утроить и произведеніе раздѣлить на два, если дѣленіе можетъ быть произведено безъ остатка; если-же нѣтъ, то къ произведенію должно прибавить 1, и тогда уже дѣлить на два. Полученное число должно опять утроить. Спросивъ затѣмъ, сколько разъ въ этомъ послѣднемъ произведеніи заключается число 9, задуманное число найдется, если взять столько-же разъ множителемъ число 2. При этомъ однако необходимо замѣтить, что если для дѣленія на 2 была прибавлена 1, то ее нужно прибавить и къ числу, которое получится, замѣняя 9 всякій разъ черезъ 2.

Положимъ, задумано число 6; утроенное оно = 18; половина 18=9; 9×3=27; гдѣ 9 содержится 3 раза; отсюда, взявъ столько же разъ множителемъ число 2, получимъ 6—задуманное число.

Если-бы было задумано число 5, то процедура была бы нѣсколько иная. 5×3 даетъ въ произведеніи число 15, которое не дѣлится на 2 безъ остатка, потому мы должны прибавить 1. Затѣмъ, половина 16=8, 8×3=24;

гдѣ 9 содержится 2 раза; поэтому взявъ 2-же раза 2 и, прибавивъ 1, (какъ было указано выше), получимъ 5— задуманное число.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Если задумано четное число $2n$, то дѣйствія надъ нимъ будутъ слѣдующія:

$$2n \times 3 = 6n,\ 6n : 2 = 3n,\ 3n \times 3 = 9n,\ 9n : 9 = n,\ 2 \times n = 2n.$$

Если-же было задумано нечетное число $2n + 1$, то:

$$(2n+1)\times 3=6n+3,\ 6n+3+1=6n+4,\ (6n+4) : 2=3n+2,$$
$$(3n+2)\times 3=9n + 6,\ (9n+6) : 9 = n,\ 2\times n+1 = 2n + 1.$$

ЗАДАЧА II.

Другой способъ рѣшенія предыдущей задачи.

Задуманное число должно утроить, произведеніе раздѣлить по-поламъ, или, если оно не дѣлится на-цѣло, то сперва прибавить единицу и тогда уже дѣлить на 2. Полученное число должно снова утроить и произведеніе раздѣлить по-поламъ (прибавляя 1, если число не дѣлится на-цѣло). Узнавъ, сколько разъ число 9 содержится въ этой послѣдней половинѣ, должно взять столько-же разъ множителемъ число 4. Необходимо замѣтить при этомъ, что, если для дѣленія въ первомъ случаѣ была прибавлена 1, то ее слѣдуетъ прибавить и къ найденному числу; если-же 1 была прибавлена при второмъ дѣленіи, то прибавляется 2. Наконецъ, если для дѣленія необходимо было прибавлять 1 въ обоихъ случаяхъ, то къ найденному числу прибавляется 3.

Положимъ, задумано число 7, утроенное его произведеніе равняется 21; прибавивъ 1 и раздѣливъ на 2, получимъ 11; $11\times 3=33$; снова прибавимъ 1 и раздѣлимъ на 2; $34 : 2=17$. 9 въ 17 содержится 1 разъ, поэтому, если возьмемъ одинъ разъ число 4 и прибавимъ 3 (такъ какъ для дѣленія мы оба раза прибавляли по единицѣ), получимъ 7—задуманное число.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Всякое число представляется въ одной изъ слѣдующихъ формъ:

$$4n,\ 4n+1,\ 4n+2,\ 4n+3.$$

Дѣйствія для каждой изъ этихъ величинъ слѣдующія:

Для $4n$:

$$4n \times 3 = 12n;\quad 12n : 2 = 6n;\quad 6n \times 3 = 18n,$$
$$18n : 2 = 9n,\quad 9n : 9 = n;\quad 4 \times n = 4n.$$

Для $4n+1$:

$$(4n+1) \times 3 = 12n+3,\quad 12n+3+1 = 12n+4,$$
$$(12n+4) : 2 = 6n+2,\quad (6n+2) \times 3 = 18n+6,$$
$$(18n+6) : 2 = 9n+3,\quad (9n+3) : 9 = n,$$
$$4 \times n + 1 = 4n+1.$$

Для $4n+2$:

$$(4n+2) \times 3 = 12n+6,\quad (12n+6) : 2 = 6n+3,$$
$$(6n+3) \times 3 = 18n+9,\quad 18n+9+1 = 18n+10,$$
$$(18n+10) : 2 = 9n+5,\quad (9n+5) : 9 = n,$$
$$4 \times n + 2 = 4n+2.$$

Для $4n+3$:

$$(4n+3) \times 3 = 12n+9,\quad 12n+9+1 = 12n+10,$$
$$(12n+10) : 2 = 6n+5,\quad (6n+5) \times 3 = 18n+15,$$
$$18n+15+1 = 18n+16,\quad (18n+16) : 2 = 9n+8,$$
$$(9n+8) : 9 = n,\quad 4 \times n + 3 = 4n+3.$$

Такимъ образомъ, слѣдуя указанному правилу, всегда можно отыскать задуманное число.

Эту же задачу можно рѣшить такимъ способомъ. Къ задуманному числу прибавить его половину, къ

полученной суммѣ прибавить еще ея половину; узнавъ сколько разъ 9 содержится въ этомъ числѣ, должно взять столько-же разъ число 4, какъ и въ предъидущемъ случаѣ. Если, однако, задуманное число не дѣлится на-цѣло на 2, то должно сперва прибавить 1 и затѣмъ уже, взявъ половину, прибавить ее къ задуманному числу. Такъ же должно поступить и при вторичномъ дѣленіи. Затѣмъ къ найденному числу прибавляется 1, если она прибавлялась для перваго дѣленія. 2—если 1 прибавлялась при второмъ дѣленіи и 3, если 1 прибавлялась въ обоихъ случаяхъ.

Напримѣръ, если было задумано число 10; прибавивъ половину его, получимъ число 15, къ которому должно прибавить 1, чтобы получить его половину 8, которую мы и прибавимъ къ 15, что дастъ въ суммѣ 23. 9 въ 23-хъ содержится 2 раза; $4 \times 2 = 8$; прибавляя 2, такъ какъ при второмъ дѣленіи была прибавлена единица, получимъ задуманное число 10.

Нѣкоторые рѣшаютъ эту-же задачу еще инымъ способомъ. Они предлагаютъ прибавить къ задуманному числу его половину, или (если число нечетное) его большую половину, (каждое нечетное число можетъ быть раздѣлено на 2 части, изъ которыхъ одна превышаетъ другую на единицу; эту часть мы и называемъ большей половиной нечетнаго числа); то же повторяется и въ другой разъ. Затѣмъ спрашиваютъ, сколько разъ въ полученномъ числѣ содержится 9 и столько-же разъ берутъ множителемъ число 4; далѣе спрашиваютъ, можно-ли вычесть число 8 изъ остатка отъ дѣленія послѣдней суммы на 9; къ полученному числу должно прибавить еще 3. Если изъ остатка нельзя вычесть 8, но можно вычесть 5, то прибавляется 2, и наконецъ, если нельзя вычесть 5, а только 3, то прибавляется къ найденному числу единица.

Легко видѣть, что оба послѣдніе способа основываются на первоначальномъ. Потому-что, какъ мы видимъ это въ послѣднемъ случаѣ, утроить число и взять половину произведенія все равно, что умножить данное число на $1^1/_2$, или, что тоже, просто прибавить его половину. Поэтому, если мы снова прибавимъ половину суммы, то это все равно, что снова помножить на $1^1/_2$... Не трудно видѣть изъ объясненія, которое мы представили по отношенію къ первому способу, что два послѣдующихъ построены на тѣхъ-же основаніяхъ и что, смотря по тому—представляется-ли данное число въ видѣ $4n+3$, или $4n+2$ или $4n+1$,—въ остаткѣ отъ дѣленія послѣдней суммы на 9 получаются числа 8, 5 или 3.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Усвоившему себѣ основанія рѣшенія этихъ двухъ задачъ не трудно будетъ придумать новыя правила, или новые способы угадывать задуманное число на подобіе предъидущихъ. Напримѣръ: предложить утроить задуманное число и взять половину произведенія, затѣмъ эту половину умножить на 5 и произведеніе снова раздѣлить по-поламъ. Задуманное число найдется, если, узнавъ сколько разъ въ этой послѣдней половинѣ содержится число 15, взять столько-же разъ множителемъ число 4; причемъ необходимо, какъ было указано выше, прибавить къ найденному числу 1, 2 или 3; смотря потому приходилось-ли прибавлять 1 для перваго дѣленія или для втораго, или-же наконецъ въ обоихъ случаяхъ.

Легко видѣть, что, если задуманное число на 1 болѣе какого нибудь вдвое четнаго числа, (которое дѣлится на 4), то, послѣ раздѣленія послѣдней половины на 15, въ остаткѣ будетъ 5; если-же задуманное число было двумя единицами болѣе какого нибудь вдвое четнаго числа, то въ остаткѣ получится 8; и, наконецъ, если задуманное число тремя единицами болѣе какого нибудь вдвое четнаго числа, то въ остаткѣ получится 13. Поэтому, подражая первому или второму способу рѣшенія этой задачи, должно предложить къ задуманному числу прибавить его половину, или большую половину (если число нечетное); затѣмъ сумму удвоить и прибавить еще число равное ея половинѣ, или большей половинѣ (тоже, что помножить на 5 и раздѣлить произведеніе на 2). Задуманное число найдется, если, узнавъ сколько разъ въ полученномъ числѣ заключается 15, взять столько-же разъ множителемъ число 4, прибавляя 1, 2 или 3, смотря потому, нужно-ли было прибавлять единицу при первомъ или второмъ дѣленіи, или же въ обоихъ случаяхъ. Или, узнавъ, осталось-ли послѣ дѣленія на 15 въ остаткѣ 13, 8 или 5, прибавлять соотвѣтственно 3, 2 изи 1.

Можно также, слѣдуя указаннымъ путямъ, подыскать и другіе способы разрѣшенія этой задачи.

ЗАДАЧА III.

Другой способъ узнать задуманное число.

Задуманное число должно утроить и произведеніе раздѣлить на 2; полученное частное утроить и снова раздѣлить на 2, прибавляя какъ въ предыдущей задачѣ 1, когда дѣленіе не совершается на-цѣло. Но вмѣсто того, чтобы спрашивать, какъ въ предыдущей задачѣ, сколько разъ въ послѣдней половинѣ содержится число 9, нужно спросить цифры, которыми выражается это число, кромѣ одной, лишь-бы это не былъ 0. Цифры, не выдѣляя и той, которая скрывается, должны быть названы въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ входятъ въ данное число. Сумму этихъ цифръ должно раздѣлить на 9 и остатокъ, или же самую сумму, если она не болѣе 9, вычесть изъ 9; полученное такимъ образомъ число и будетъ скрытая цифра. Если въ послѣднемъ случаѣ остатка отъ вычитанія не окажется, то скрытая цифра равна 9. Все это однако относится къ тому случаю, когда дѣленіе совершалось оба раза безъ прибавленія единицы. Если-же для перваго дѣленія была прибавлена 1, то къ суммѣ сказанныхъ цифръ должно прибавить 6 и затѣмъ уже

поступать, какъ было указано выше. Если 1 была прибавлена при второмъ дѣленіи, то къ суммѣ цифръ прибавляется 4, и наконецъ, если дѣленіе не совершалось на-цѣло въ обоихъ случаяхъ, то къ суммѣ цифръ должно прибавить 1. Узнавъ такимъ образомъ скрытую цифру, мы узнаемъ вполнѣ всю послѣднюю половину. Далѣе, спросивъ сколько разъ въ это число входитъ множителемъ число 9, возьмемъ столько-же разъ множителемъ число 4, прибавляя 1, 2 или 3 въ тѣхъ случаяхъ, которые были указаны въ предыдущей задачѣ.

Положимъ, кто либо задумалъ число 24: совершивъ надъ этимъ числомъ указанныя выше дѣйствія, мы получимъ, послѣ послѣдняго дѣленія на 2, число 54. Отсюда, если намъ назовутъ первую цифру 5, то, вычтя ее изъ 9, мы получимъ 4—скрытую отъ насъ цифру; если-же намъ назовутъ вторую цифру 4, то такимъ-же образомъ мы найдемъ первую цифру 5. Послѣ мы узнаемъ, что послѣдняя половина равна 54, гдѣ 9 содержится 6 разъ; и если возьмемъ столько-же разъ множителемъ 4, то получимъ задуманное число 24.

Если было задумано число 25, то послѣдняя половина будетъ 57, но для дѣленія въ первомъ случаѣ должна быть прибавлена 1. Поэтому, если намъ назовутъ первую цифру 5, то нужно прибавить къ ней 6 и изъ этой суммы и вычесть 9; остатокъ 2 вычесть изъ 9, и тогда получится скрытая вторая цифра 7. Итакъ послѣдняя половина равна 57, гдѣ 9 содержится 6 разъ. Взявъ столько-же разъ 4 и прибавивъ единицу, такъ какъ для перваго дѣленія пришлось прибавить 1, мы найдемъ задуманное число 25.

Положимъ, будетъ извѣстно, что послѣдняя половина выражается тремя цифрами, изъ которыхъ двѣ послѣднія 1 и 3, и что дѣленіе не совершалось на-цѣло во второмъ случаѣ. Прибавимъ къ суммѣ этихъ цифръ

число 4, получимъ 8, по вычитаніи которыхъ изъ 9 остается 1, обозначающая скрытую цифру. Такимъ образомъ найдемъ, что послѣдняя половина равнялась 113, гдѣ 9 содержится 12 разъ; помноживъ 12 на 4, получимъ число 48, къ которому должно еще прибавить 2 (такъ какъ 1 была прибавлена при вторичномъ дѣленіи). Задуманное число равняется 50.

Наконецъ, если послѣдняя половина состоитъ изъ трехъ цифръ, изъ которыхъ первая есть 1, послѣдняя 7, и если дѣленіе не совершалось на-цѣло въ обоихъ случаяхъ, то, прибавивъ къ суммѣ цифръ равной 8-ми единицу, найдемъ, что при вычитаніи изъ 9, какъ было указано выше, остатка не получится, а слѣдовательно искомая цифра и есть 9. Отсюда, слѣдовательно, вся послѣдняя половина будетъ 197, гдѣ 9 содержится 21 разъ; помноживъ 21 на 4 и прибавивъ къ произведенію (84) число 3, получимъ задуманное число 87.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Изъ объясненія къ задачѣ II видно, что для какого-нибудь числа $4n$ въ результатѣ послѣ указанныхъ дѣйствій получится число $9n$, т. е. кратное 9; сумма цифръ, слѣдовательно, должна быть также число кратное 9. (Число дѣлится на 9, если сумма цифръ дѣлится на 9). Поэтому скрытая цифра должна равняться числу, которое необходимо прибавить къ суммѣ другихъ цифръ, чтобы получить кратное 9; и, если эта сумма сама по себѣ есть кратное 9, то скрытая цифра будетъ непремѣнно 9, такъ какъ по условію задачи это не можетъ быть 0.

Для числа $4n+1$ результатъ указанныхъ дѣйствій

будетъ $9n+3$; прибавивъ 6, получимъ число кратное 9; сумма цифръ также будетъ кратное 9.

Для числа $4n+2$ результатъ будетъ $9n+5$; прибавивъ 4, получимъ число кратное 9; сумма цифръ будетъ также кратное 9.

Наконецъ для числа $4n+3$ результатъ будетъ $9n+8$; прибавивъ 1, получимъ кратное 9; сумма цифръ будетъ опять также кратное 9.

ЗАДАЧА IV.

Другой способъ рѣшенія той-же задачи.

Задуманное число должно удвоить и къ произведенію прибавить 5; потомъ все умножить на 5 и къ произведенію прибавить 10; и наконецъ, все умножить на 10. Справившись чему равняется послѣднее произведеніе, вычесть изъ него 350; задуманное число будетъ равно числу сотенъ остатка.

Положимъ, задуманное число 3; удвоивъ, получимъ 6. прибавивъ 5, получимъ 11; это число, умноженное на 5, равно 55. Прибавивъ къ этому числу 10, получимъ число 65, которое отъ умноженія на 10, дастъ 650. Вычтя отсюда 350, получимъ въ остаткѣ 300; слѣдов. задуманное число равно 3, такъ какъ остатокъ заключаетъ въ себѣ три сотни.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Возьмемъ какое нибудь число n и произведемъ надъ нимъ дѣйствія, указанныя правилами этой задачи:

$$n \times 2 + 5 = 2n + 5,\ (2n + 5) \times 5 = 10n + 25,$$

$$10n + 25 + 10 = 10n + 35,\ (10n + 35) \times 10 = 100n + 350,$$
$$100n + 350 - 350 = 100n,\ 100n : 100 = n,$$

что доказываетъ вѣрность указанныхъ правилъ.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Усвоившему себѣ твердо основанія, на которыхъ строится приведенное объясненіе, не трудно будетъ разнообразить до безконечности способы рѣшенія этой задачи. Положимъ, напримѣръ, что кто-либо желаетъ, чтобы, сохраняя всѣ остальныя условія, вмѣсто 350 изъ послѣдняго произведенія вычиталось-бы какое-нибудь другое число. Нужно прежде всего имѣть въ виду, что число 350 произошло отъ числа 5, прибавленнаго въ самомъ началѣ; затѣмъ 5 было помножено на 5, къ произведенію (25) прибавлено было 10 (35) и, наконецъ, все умножено на 10. Поэтому, чтобы замѣнить 350 другимъ числомъ, надо измѣнить прибавляемыя числа, напримѣръ: вмѣсто 5-ти и 10-ти взять 4 и 12, или какія-бы то ни было другія числа. Чтобы узнать какое число замѣнитъ 350, надо помножить 4 на 5; получится 20; къ этому прибавить 12, получится 32, которое, помноженное на 10, дастъ 320. Это-то число и придется вычесть изъ послѣдняго произведенія. Вмѣсто 4-хъ и 12-ти можно брать и другія числа, и такимъ образомъ получится безконечное множество рѣшеній этой задачи.

Или можно рѣшеніе этой задачи измѣнить такимъ образомъ. Число сотенъ остатка по прежнему будетъ выражать задуманное число, но будутъ измѣнены три множителя: 2, 5 и 10. Для этого нужно только взять три такихъ числа, чтобы ихъ произведеніе равнялось 100.

И прежде всего можно взять тѣ же множители, но только въ измѣненномъ порядкѣ: сначала умножить на 5, потомъ на 10 и наконецъ на 2 и т. д.

Затѣмъ можно взять другія числа, какъ напр.: 5, 4, 5, или 2, 25, 2. Необходимо однако обратить вниманіе, что число, которое вычитается въ концѣ, при всѣхъ этихъ измѣненіяхъ также измѣняется, въ зависимости отъ множителей и чиселъ, которыя прибавляются. Возьмемъ множителями 5, 4 и 5, а числа, которыя мы будемъ прибавлять, пусть будутъ 6 и 9; задуманное число пусть будетъ 8. Умноживъ его на 5, получимъ 40; прибавивъ 6, получимъ 40 + 6; отъ умноженія этого числа на 4, получимъ 160 + 24; прибавивъ 9, получимъ число 160 + 33, которое умноженное на 5, дастъ 800 + 165; откуда видно, что, отнявъ 165, въ достаткѣ получится 800, гдѣ число сотенъ равно задуманному числу.

Далѣе можно сдѣлать, чтобы задуманное число выражалось не числомъ сотенъ, а какимъ нибудь другимъ числомъ, которое содержится въ послѣднемъ остаткѣ столько разъ, сколько единицъ въ задуманномъ числѣ. Для этого достаточно, чтобы произведеніе трехъ множителей равнялось этому числу. Такъ, если желательно, чтобы это число равнялось 24, надо взять множители 2, 3 и 4, или 2, 6 и 2. Для примѣра возьмемъ множителями 2, 3 и 4, а числа, которыя мы будемъ прибавлять, пусть будутъ 7 и 8; задуманное число мы предположимъ равнымъ 5. 5 умноженное на 2 равно 10; прибавляя 7, получимъ 10 + 7; отъ умноженія на 3, получимъ 30 + 21; прибавивъ 8, получится 30 + 29; все это умноженное на 4 дастъ 120+116. Вычтя отсюда 116, получимъ въ остаткѣ 120, гдѣ 24 содержится 5 разъ; 5 и есть задуманное число.

Можно также взять только двухъ множителей и прибавить только одно число. Такъ, для того, чтобы задуманное число выражалось числомъ десятковъ, надо взять множителями 2 и 5; и пусть число, которое нужно прибавить, будетъ 6, а задуманное число 7. Отъ умноженія 7 на 2, получимъ 14; прибавивъ 6, получимъ 14 + 6; это число умноживъ на 5, получимъ 70 + 30. Отсюда нужно отнять 30 и тогда остатокъ 70 будетъ заключать въ себѣ столько десятковъ, сколько въ задуманномъ числѣ заключалось единицъ. Количество множителей и прибавляемыхъ чиселъ можетъ быть, какъ было сказано выше, увеличено по желанію.

Наконецъ можно измѣнить способъ рѣшенія этой задачи, употребляя вычитаніе вмѣсто сложенія, и, въ зависимости отъ этого, въ концѣ задачи сложеніе вмѣсто вычитанія. Положимъ, задуманное число равно 12. Воспользуемся числами, которыя мы привели въ первомъ примѣрѣ: 12, умноженное на 2, равно 24; вычитая 5, получимъ 24—5; помноживъ на 5, получимъ 120 — 25; отсюда вычитая 10, получимъ 120—35, помноживъ все это на 10, получимъ въ концѣ концовъ 1200 — 350. Теперь изъ этого числа нужно не вычесть, какъ прежде, число 350, а напротивъ прибавить 350; тогда получится число 1200, гдѣ число сотенъ есть задуманное число 12.

ЗАДАЧА V.

Еще способъ отгадать задуманное число.

Способъ этотъ покажется оригинальнѣе предыдущихъ, но объясненіе его значительно легче на самомъ дѣлѣ.

Задуманное число должно умножить на какое нибудь другое число; затѣмъ это произведеніе раздѣлить на какое нибудь новое число; снова помножить и снова дѣлить на какія угодно числа и т. д., сколько угодно разъ. Выборъ множителей и дѣлителей можно даже предоставить лицу, задумавшему число, съ тѣмъ однако, чтобы онъ говорилъ, какіе онъ беретъ множители и дѣлители. Чтобы угадать задуманное число, нужно самому взять какое нибудь число и производить надъ нимъ всѣ тѣ дѣйствія, которыя будутъ производиться надъ задуманнымъ числомъ. Затѣмъ должно предложить лицу, задумавшему число, раздѣлить послѣдній результатъ на задуманное число, въ это-же время нужно и свой окончательный результатъ раздѣлить на первоначально взятое число. Частное въ обоихъ случаяхъ непремѣнно будетъ одно и то же. Поэтому, спросивъ чему равняется сумма задуманнаго числа съ этимъ

частнымъ (отъ дѣленія послѣдняго числа на задуманное), найдемъ искомое число, вычтя изъ этой суммы извѣстное частное.

Положимъ, задумано число 5; умноженное на 4, оно дастъ 20; $20 : 2 = 10$; $10 \times 6 = 60$; $60 : 4 = 15$ и т. д. сколько угодно, но въ тоже время нужно самому производить тѣ же дѣйствія надъ какимъ нибудь числомъ. Возьмемъ 4 (лучше всего взять единицу): $4 \times 4 = 16$; $16 : 2 = 8$; $8 \times 6 = 48$; $48 : 4 = 12$. Прекращая на этомъ дѣйствія надъ задуманнымъ числомъ, должно предложить лицу, задумавшему число, раздѣлить результатъ всѣхъ этихъ дѣйствій, т. е. 15 на задуманное число 5. Частное будетъ равно 3; легко видѣть, что тоже частное получится отъ раздѣленія своего послѣдняго числа 12 на первоначально взятое число 4. Сумма задуманнаго числа съ послѣднимъ частнымъ равна 8; откуда $8 - 3 = 5$, задуманному числу.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Производя надъ какимъ нибудь числомъ n цѣлый рядъ умноженій и дѣленій, мы получаемъ результатъ въ видѣ формулы $n\frac{abc\,..}{gh\,..}$; и производя тѣ-же дѣйствія надъ какимъ либо числомъ p, получимъ $p\frac{abc\,..}{gh\,..}$. Раздѣливъ эти количества: одно на n, а другое на p, получимъ одно и тоже число $\frac{abc\,..}{gh\,..}$; слѣдовательно, зная $\frac{abc\,..}{gh\,..}$, и, узнавъ чему равняется $\frac{abc\,..}{gh\,..} + n$, достаточно вычесть $\frac{abc\,..}{gh\,..}$, чтобы узнать n.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Рѣшенія этой задачи могутъ также быть измѣняемы до безконечности, вслѣдствіе того, что можно измѣнять сколько угодно дѣлителей и множителей, а равно и ихъ порядокъ. Можно также, узнавъ послѣднее частное, замѣнить сложеніе вычитаніемъ, если задуманное число менѣе этого частнаго. Такъ въ этомъ примѣрѣ, еслибы мы остановились послѣ умноженія на 6, послѣднее число съ одной стороны было-бы 60, а съ другой 48. Заставляя раздѣлить 60 на задуманное число 5, получается частное 12, которое получится точно также и отъ дѣленія 48 на 4. Предложивъ вычесть изъ частнаго 12 задуманное число, и узнавъ, что въ остаткѣ получилось 7, задуманное число найдется, если это число 7 вычесть изъ 12, $12 - 7 = 5$.

ЗАДАЧА VI.

Еще способъ рѣшенія этой-же задачи.

Этотъ способъ самый трудный изъ всѣхъ, и объясненіе его довольно сложно.

Возьмите два или три числа первыя между собой, какъ напр. 3, 4 и 5, и отыщите ихъ общее наименьшее кратное число, которое, для даннаго случая будетъ 60. Затѣмъ предложить кому-либо задумать число, которое не превышало-бы 60. Самому нужно отыскать такое число, которое, дѣлясь на-цѣло на 3 и 4, превышало-бы на единицу какое нибудь число кратное 5. какъ напримѣръ 36; далѣе нужно найти другое число, которое, дѣлясь на 3 и на 5, превышало-бы на единицу какое нибудь кратное 4, каково 45; и наконецъ найти число, дѣлящееся на 4 и 5 и превышающее на 1 какое нибудь число кратное 3, каково 40. Найдя эти три числа, предложить раздѣлить задуманное число на 3, и, спросивъ чему равенъ остатокъ, возьмите столько разъ 40, сколько единицъ содержится въ этомъ остаткѣ. Далѣе такимъ-же образомъ надо раздѣлить задуманное число на 4 и взять столько разъ 45, сколько единицъ содержится въ этомъ остаткѣ; и, наконецъ, раздѣливъ

задуманное число на 5, взять столько разъ 36, сколько единицъ будетъ въ этомъ послѣднемъ остаткѣ. Всѣ такимъ образомъ полученныя числа должно сложить вмѣстѣ и, если сумма ихъ будетъ менѣе 60, то это и есть задуманное число; если-же сумма этихъ чиселъ будетъ болѣе 60, то задуманное число равно остатку отъ дѣленія этой суммы на 60.

Положимъ, кто-нибудь задумалъ число 19; отъ дѣленія на 3 въ остаткѣ получится 1, за которую мы возьмемъ 40 одинъ разъ; отъ дѣленія 19 на 4, получимъ въ остаткѣ 3 и удержимъ поэтому 3 раза 45, т. е. 135; отъ дѣленія 19 на 5 въ остаткѣ будетъ 4, и мы удержимъ 4 раза 36, т. е. 144. Сложивъ вмѣстѣ: 40, 135 и 144, получимъ сумму 319, которая превышаетъ 60. Раздѣливъ 319 на 60, получимъ 19—задуманное число. Въ томъ случаѣ, если при дѣленіи на 3, 4 и 5 не получилось-бы никакихъ остатковъ, число задуманное должно быть равно 60.

Задача эта можетъ быть сдѣлана также съ четырьмя, пятью, шестью и т. д. числами первыми между собою. Возьмемъ четыре числа 2, 3, 5, 7. Тогда число, больше котораго не можетъ быть задумано, будетъ равняться 210, произведенія всѣхъ 4-хъ множителей; за всякую 1 остатка отъ дѣленія задуманнаго числа на 2 надо будетъ удерживать 105 (кратное 3, 5, 7, которое на 1 превышаетъ число кратное 2); за всякую 1 остатка отъ дѣленія задуманнаго числа на 3 должно будетъ удерживать 70 (кратное 2, 5, 7, превышающее на 1 кратное 3); за 1 остатка отъ дѣленія на 5 должно удержать 126 (кратное 2, 3, 7, превышающее на 1 кратное 5); и наконецъ, за каждую 1 остатка отъ дѣленія задуманнаго числа на 7 нужно удержать 120 (кратное 2, 3, 5, которое превышаетъ на 1 кратное 7). Сложивъ всѣ удержанныя числа, получимъ задуманное число, если

только эта сумма не превышаетъ 210. Въ послѣднемъ случаѣ задуманное число будетъ остатокъ отъ дѣленія этой суммы на 210.

ОБЪЯСНЕНІЕ *).

Мы взяли числа первыя между собою $a, b, c\ldots$, и кто-либо задумалъ нѣкое число n, не прнвышающее ихъ произведенія $a\,b\,c\ldots$, которое есть ихъ наименьшее кратное число M. Мы дѣлили n послѣдовательно на a, на b, и на $c,\ldots$ и отъ дѣленія получили остатки $\alpha, \beta, \gamma\ldots$ Но извѣстно, что не можетъ быть двухъ чиселъ меньшихъ M, которыя при дѣленіи на a, b и $c\ldots$ дали-бы одинаковую систему остатковъ (см. въ концѣ книги примѣчаніе I); поэтому число n опредѣляется остатками $\alpha, \beta, \gamma\ldots$. Но есть однако числа большія M, которыя даютъ тѣ-же остатки, это:
$M+n$, $2M+n$, $3M+n,\ldots$. (примѣч. I, въ концѣ книги), и кромѣ этихъ другихъ нѣтъ. Мы дѣлали слѣдующія вычисленія: *)

$$\dot{\overline{bc..}} = \dot{a} + 1,$$
$$\dot{\overline{ac..}} = \dot{b} + 1;$$
$$\dot{\overline{ab..}} = \dot{c} + 1;$$

---

*) Замѣтимъ здѣсь разъ навсегда, что мы будемъ обозначать кратное какого нибудь числа, ставя точку надъ этимъ числомъ: такъ $\dot{9}$ = кратному 9, $\dot{\overline{327}}$ есть кратное 327, $\dot{\overline{ac}}$ кратное $a\,c$. Тоже будемъ дѣлать, чтобы выразить кратное нѣсколькихъ чиселъ, раздѣляя ихъ въ этомъ случаѣ запятыми; напр: $\dot{\overline{a,b}}$, общее кратное число двухъ количествъ a и b.

откуда

$$\alpha\,\dot{\overline{bc\ldots}} = \dot{a} + \alpha,$$
$$\beta\,\dot{\overline{ac\ldots}} = \dot{b} + \beta,$$
$$\gamma\,\dot{\overline{ab\ldots}} = \dot{c} + \gamma.$$

Не трудно видѣть, что сумма:

$$\alpha\,\dot{\overline{bc\ldots}} + \beta\,\dot{\overline{ac\ldots}} + \gamma\,\dot{\overline{ab\ldots}} + \ldots,$$

будучи послѣдовательно дѣлима на $a, b, c,\ldots$ дастъ остатки $\alpha, \beta, \gamma,\ldots$; слѣдовательно эта сумма есть одно изъ чиселъ: n, $M + n$, $2M + n$, и т. д.; это будетъ число n, если данная сумма менѣе M, въ противномъ случаѣ достаточно раздѣлить ее на M, чтобы получить n.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Вычисленіе величинъ $\dot{\overline{bc\ldots}}$, $\overline{ac\ldots}$,… и т. д. показано въ концѣ книги въ примѣчаніи; но, какъ въ ариѳметическихъ играхъ величины a, b, c и т. д. суть числа небольшія, то вопросъ можно рѣшить весьма скоро слѣдующимъ образомъ. Положимъ, нужно найти кратное 7 и 9, которое-бы превышало на 1 кратное 11. Первое наименьшее кратное 7 и 9 есть 63; оно равняется кратному 11-ти + 8; поэтому слѣдующія кратныя отъ 63-хъ суть кратныя 11, послѣдовательно увеличенныя кратными 8, которыя при этомъ должно уменьшать на 11 всякій разъ, что они превысятъ 11. Такимъ образомъ найдемъ: кратное 11 + 8 + 8, или 1 + 16, откуда исключая 11, получимъ кратное 11 + 5; затѣмъ 11 + (5 + 8) или + 2; 11 + (2 + 8) или + 10; 11 + (10 + 8) или 11 + (7 + 8) или 11 + 4, 11 + (4 + 8) или 11 + 1.

Итакъ мы находимъ седьмое кратное число 63-хъ или 441, которое первое равняется числу кратному 11+1.

Точно также можно найти кратное 7 и 11, которое превосходило-бы кратное 9 на 1. Первое кратное 77 превосходитъ число кратное 9 на 5, поэтому слѣдующее кратное 154 будетъ превосходить число кратное 9-ть на 10 или на 1.

Наконецъ мы найдемъ, что первое кратное число 9 и 11 или 99 на 1 болѣе кратнаго 7; $7 \times 14 = 98$.

ЗАДАЧА VII.

Отгадать нѣсколько чиселъ, которыя были кѣмъ нибудь задуманы.

Пусть кто нибудь задумаетъ нѣсколько чиселъ, такъ чтобы на первый разъ сумма ихъ была нечетное число. Надо прежде всего узнать чему равна сумма первыхъ двухъ чиселъ, затѣмъ суммы: втораго числа съ третьимъ, третьяго съ четвертымъ и т. д. и наконецъ послѣдняго съ первымъ. Затѣмъ, взявъ всѣ эти суммы въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ будутъ названы, сложить отдѣльно суммы, которыя придутся на нечетныхъ мѣстахъ, и совокупность четныхъ суммъ вычесть изъ совокупности нечетныхъ суммъ. Полученный остатокъ будетъ равенъ удвоенному первому задуманному числу, которое и найдется, раздѣливъ этотъ остатокъ на 2. Найдя такимъ образомъ одно изъ задуманныхъ чиселъ, ничего не стоитъ отыскать и другія, такъ какъ мы имѣемъ суммы всѣхъ чиселъ по-два.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Пусть будутъ задуманы числа a, b, c, d, e. Узнаемъ суммы:

$$a+b \quad , \quad b+c$$
$$c+d \quad , \quad d+e.$$
$$e+a \quad ,$$

Сложимъ отдѣльно суммы на нечетныхъ и четныхъ мѣстахъ; получимъ: совокупность нечетныхъ суммъ:

$$a+b+c+d+e+a;$$

совокупность четныхъ суммъ:

$$b+c+d+e;$$

Разность между этими двумя количествами равняется $2a$, откуда $\frac{2a}{2}=a$. Вычитая это первое найденное число изъ первой суммы, получимъ второе задуманное число b; вычтя это второе число изъ второй суммы, получимъ c и т. д.

Если будетъ задумано четное число чиселъ, то нужно точно также узнать, какъ и прежде, суммы этихъ чиселъ по два, но вмѣсто суммы послѣдняго числа съ первымъ, спросить сумму послѣдняго числа со вторымъ. Тогда, сложивъ суммы нечетныхъ мѣстъ, кромѣ первой, и, вычтя эту общую сумму изъ совокупности суммъ четныхъ мѣстъ, получимъ разность, которая будетъ равна удвоенному второму задуманному числу

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Задуманы числа a, b, c, d, e, f. Имѣемъ суммы:

$$a+b \quad , \quad b+c$$
$$c+d \quad , \quad d+e$$
$$e+f \quad , \quad f+b$$

Совокупность нечетныхъ суммъ, кромѣ первой, будетъ

$$c + d + e + f,$$

а общая сложность суммъ четныхъ мѣстъ:

$$b + c + d + e + f + b.$$

Вычтя изъ этого второго многочлена первый, получимъ разность $2b$, половина которой и будетъ, слѣдовательно, второе задуманное число. Далѣе уже легко найдутся другія задуманныя числа.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Эту задачу можно рѣшать и многими другими способами. Во-первыхъ, посредствомъ такъ называемыхъ фальшивыхъ правилъ, или посредствомъ Алгебры, что мы и предоставляемъ желающимъ.

Во-вторыхъ, другимъ весьма легкимъ способомъ, который состоитъ въ слѣдующемъ. Должно сложить вмѣстѣ всѣ данныя суммы и раздѣлить эту общую сумму на 2; частное отъ этого дѣленія будетъ равняться суммѣ всѣхъ задуманныхъ чиселъ, если ихъ было нечетное количество. Если же чиселъ было задумано четное количество, то, оставивъ въ сторонѣ первую сумму, сложить всѣ остальныя и раздѣлить на два; это даетъ сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ, безъ перваго. Зная сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ, не трудно найти каждое изъ нихъ. Пусть 2, 3, 4, 5, 6 будутъ задуманныя числа; суммы ихъ попарно будутъ 5, 7, 9, 11, 8, общая сложность которыхъ составитъ 40; а это число,

дѣленное на 2 и дастъ сумму всѣхъ задуманныхъ чиселъ 20. (Что легко понять, такъ какъ каждое число входитъ въ общую сумму два раза). Отсюда, если мы захотимъ отгадать первое изъ задуманныхъ чиселъ, то, зная, что второе число, сложенное съ третьимъ, равно 7, и что четвертое число, сложенное съ пятымъ, равно 11, вычтемъ 7 + 11 изъ общей суммы чиселъ (20) и тогда полученная разность 2 будетъ непремѣнно первое задуманное число. Другія задуманныя числа найдутся или такимъ же путемъ, или замѣняя неизвѣстныя величины въ суммахъ попарно найденными числами. Если бы было задумано четное количество чиселъ, то нужно прежде всего отбросить первую сумму и, затѣмъ, поступать какъ въ предъидущемъ случаѣ.

Въ третьихъ, можно рѣшить эту же задачу совершенно другимъ способомъ. Если кто-либо задумалъ три числа, пусть объявитъ суммы этихъ чиселъ по два, а если кто задумалъ четыре числа, пусть объявитъ суммы ихъ по три, во всѣхъ возможныхъ соединеніяхъ. Если же задумано пять чиселъ, надо узнать суммы отдѣльныхъ чиселъ, взятыхъ по четыре и т. д. Въ подобныхъ случаяхъ должно держаться слѣдующаго общаго правила: сложить всѣ сказанныя суммы и раздѣлить общую совокупность ихъ на число, на единицу меньшее количества всѣхъ задуманныхъ чиселъ; частное будетъ равняться суммѣ задуманныхъ чиселъ, а какъ скоро послѣдняя будетъ извѣстна, не трудно найти всѣ задуманныя числа. Положимъ, задуманы слѣдующія четыре числа: 3, 5, 6, 8; сумма первыхъ трехъ равна 14, сумма втораго, третьяго и четвертаго равна 19, сумма третьяго, четвертаго и перваго равна 17, и сумма четвертаго, перваго и втораго равна 16. Сложивъ вмѣстѣ всѣ эти суммы, получимъ число 66, которое, будучи раздѣлено на 3 (число на единицу меньшее числа всѣхъ

задуманныхъ чиселъ), дастъ въ частномъ 22; это и есть сумма всѣхъ задуманныхъ чиселъ. Вычитая послѣдовательно изъ 22 суммы 14, 19, 17 и 16, получимъ одно за другимъ всѣ задуманныя числа.

ЗАДАЧА VIII.

Отгадать, ничего не спрашивая, число, которое имѣется у кого-нибудь въ умѣ.

Предложите кому нибудь задумать число и это число умножить на какое нибудь другое число, взятое вами (adlibitum); къ этому произведенію предложите прибавить другое число, опять-таки по своему желанію, и наконецъ всю эту сумму предложите раздѣлить на какое нибудь третье число. При этомъ самому нужно про себя раздѣлить число, на которое совершилось умноженіе, на число, которое было избрано дѣлителемъ; и сколько единицъ, или частей единицъ получится въ этомъ частномъ, столько разъ надо задуманное число вычесть изъ послѣдняго частнаго, получившагося у лица, задумавшаго число. Остатокъ отъ этого вычитанія и будетъ задуманное число, которое, такимъ образомъ, всегда можно узнать, ничего не спрашивая, такъ какъ этотъ остатокъ всегда будетъ равняться частному отъ дѣленія числа, которое мы прибавляли послѣ умноженія, на число, взятое дѣлителемъ.

Напримѣръ, кто нибудь задумалъ число 6; умножимъ это число, положимъ, на 4, получится 24; къ

этому прибавимъ 15, будетъ 39; раздѣлимъ эту сумму на 3, частное будетъ равняться 13. Тогда, раздѣляя множителя 4 на дѣлителя 3, получимъ $1\frac{1}{3}$; поэтому, вычитая изъ частнаго 13 задуманное число $1\frac{1}{3}$ раза, т. е. $6 + 2$ или 8, получимъ 5, число, которое получится точно также отъ дѣленія прибавлявшагося числа 15 на дѣлителя 3.

Тоже самое, еслибы кто задумалъ число 8; предложите умножить это число на 6, получится 48; прибавивъ 12, получится 60; отъ дѣленія на 4, получится 15. Раздѣливъ теперь множителя на дѣлителя, получимъ въ частномъ число $1\frac{1}{2}$; вычитая полтора раза изъ послѣдняго частнаго 15 задуманное число 8, получимъ $15 - (8 + 4)$ или 3. То же число получится отъ дѣленія прибавленнаго числа на дѣлителя $(12 : 4 = 3)$.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Дѣйствія, которыя въ этомъ случаѣ совершаются надъ какимъ нибудь числомъ n, можно выразить формулою $\frac{na + b}{c}$, которую можно представить также въ видѣ $n\frac{a}{c} + \frac{b}{c}$; откуда, если отбросить $n\frac{a}{c}$, получится $\frac{b}{c}$.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Эта задача многими обыкновенно рѣшается совсѣмъ другимъ, болѣе простымъ способомъ. Предлагаютъ задуманное число удвоить и прибавить къ нему какое нибудь четное число; затѣмъ сумму эту дѣлятъ на 2 и изъ частнаго предлагаютъ вычесть задуманное число; въ остаткѣ получится половина прибавленнаго четнаго числа. Но наше рѣшеніе гораздо интереснѣе и на практикѣ покажется замысловатѣе. Намъ могутъ возразить, что нашъ способъ не для всѣхъ удобенъ, такъ какъ въ немъ обыкновенно приходится имѣть дѣло съ дробями, и рѣдко кто можетъ свободно обращаться съ ними.

На это мы прежде всего отвѣтимъ, что книга эта и не написана для круглыхъ невѣждъ, а затѣмъ, наконецъ, можно этотъ способъ измѣнить такимъ образомъ, чтобы не имѣть дѣла съ дробями. Напримѣръ: можно взять, какъ множителя, какое угодно число и затѣмъ дѣлителемъ взять или это же число, или другое, которымъ оно однако измѣряется; и наконецъ для числа, которое будетъ прибавляться, также взять какое нибудь кратное этого дѣлителя. Положимъ, задумано число 7: предложите умножить его на 5; получимъ 35; и, такъ какъ 5 не заключаетъ въ себѣ никакого другаго дѣлителя, кромѣ 5, то нужно взять тоже число 5 и дѣлителемъ; точно также нужно, чтобы и число, которое будетъ прибавляться, было бы также кратное 5, напримѣръ 10. Прибавивъ 10 къ 35, получимъ 45; 45, дѣленное на 5, дастъ 9; откуда, если вычтемъ задуманное число, получимъ 2, которое точно также получится, когда раздѣлимъ 10 на 5. Если мы возьмемъ за множителя число 6, то дѣлителемъ можно взять или то же число 6, или 3, или 2, и т. д.

Наконецъ можно заставить лицо, задумывающее число, взять какое нибудь число, которое было бы кратнымъ того числа, которое мы хотимъ взять за дѣлителя; тогда будетъ безразлично, на какое число ни умножать, лишь бы прибавляемое число дѣлилось на взятаго нами дѣлителя.

ЗАДАЧА IX.

Изъ двухъ задуманныхъ двумя лицами чиселъ, изъ которыхъ одно четное, а другое нечетное, узнать, какимъ лицомъ какое число задумано.

Пусть два лица А и В задумали два числа, одинъ четное, а другой нечетное, такъ чтобы не было извѣстно, кто задумалъ четное, кто нечетное число. Для того, чтобы узнать, какое кто задумалъ число, нужно самому взять 2 числа, одно четное, другое нечетное, какъ напримѣръ 2 и 3, и затѣмъ дать помножить число, задуманное А, на 2, а число, задуманное Б, на 3. Затѣмъ предложить сложить эти произведенія и сказать ихъ сумму, или только сказать четная она, или нечетная. Узнавъ это, не трудно рѣшить задачу, такъ какъ, если сумма будетъ четное число, то слѣдовательно число, которое умножалось на нечетное (3), само было четное число. Если сумма будетъ число нечетное, то число, которое умножалось на нечетное число, было непремѣнно само нечетное.

Положимъ, А и В задумали числа 10 и 9; предложите А умножить число имъ задуманное на 2, а число, задуманное В, на 3; произведенія будутъ 20 и 27, сумма

которыхъ равна 47 — числу нечетному; слѣдовательно число, которое умножалось на 3, было число нечетное, а слѣдовательно А задумалъ число четное 10, а В нечетное 9.

Если заставить помножить на 2 число, задуманное В, а на 3 число, которое взято А, то сумма произведеній будетъ равна четному числу 48; слѣдовательно число, которое умножалось на три, было четное число, а потому А задумалъ четное, а В нечетное число.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Всякое число, четное ли оно, или нѣтъ, отъ умноженія на 2 необходимо дастъ въ произведеніи четное число; поэтому сумма двухъ произведеній будетъ четное или нечетное число, смотря по тому, будетъ ли и другое произведеніе (отъ умноженія на нечетное число) четное число или нѣтъ. Но, такъ какъ въ этомъ второмъ произведеніи одинъ изъ множителей нечетное число, то оно будетъ четное или нечетное, смотря по тому, будетъ ли другой множитель четное или нечетное число. Отсюда слѣдуетъ, что число, которое умножается на нечетное число, должно быть четное или нечетное одновременно съ суммою обоихъ произведеній.

ЗАДАЧА X.

Сдѣлать тоже съ двумя четными числами, изъ которыхъ одно вдвое четное число, а другое простое четное число (число, которое только разъ дѣлится на 2).

Взявъ, какъ въ предъидущей задачѣ, одно четное и одно нечетное число, предложите помножить одно изъ двухъ неизвѣстныхъ чиселъ на четное, а другое на нечетное число, сложить оба эти произведенія и сказать будетъ ли эта сумма вдвое четное число, или простое четное число. Неизвѣстное число, которое умножалось на нечетное, всегда будетъ вдвое четное или простое четное число одновременно съ суммою произведеній.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Вдвое четное число, будетъ ли оно умножено на четное или же нечетное число, всегда дастъ въ произведеніи вдвое четное число; поэтому сумма двухъ произведеній будетъ число вдвое четное, или простое четное, смотря потому каково будетъ второе произведеніе. Но въ этомъ второмъ произведеніи одинъ изъ множителей—нечетное число, поэтому оно будетъ вдвое четное,

или простое четное, смотря потому, будетъ-ли другой множитель вдвое четное, или простое четное число. Неизвѣстное же четное число, которое умножалось на нечетное число, должно быть вдвое четное, или простое четное число одновременно съ суммою произведеній.

ЗАДАЧА XI.

То-же съ двумя числами первыми между собою.

Предложите двумъ лицамъ избрать два числа первыя между собою, напр: 9 и 7, но такъ, чтобы одно изъ нихъ было число сложное, какъ въ этомъ случаѣ 9. Въ тоже время и сами возьмите множителями два числа первыя между собою, и чтобы одно изъ нихъ входило множителемъ въ одно изъ двухъ предъидущихъ чиселъ; напримѣръ, возьмите 3 и 2, числа первыя между собою, и 3 входитъ множителемъ въ одно изъ предъидущихъ чиселъ: именно 9. Затѣмъ предложите, какъ и прежде, одно изъ избранныхъ чиселъ помножить на 2, другое на 3, и пусть будетъ объявлена сумма обоихъ произведенiй; или по крайней мѣрѣ сказано, дѣлится-ли данная сумма на того изъ вашихъ множителей, который входитъ множителемъ въ одно изъ двухъ выбранныхъ чиселъ; т. е. въ данномъ случаѣ нужно узнать, дѣлится-ли сумма произведенiй на 3. Тогда уже легко узнать кто изъ лицъ взялъ какое число; потому-что, какъ скоро эта сумма дѣлится на 3, то это доказываетъ, что на 3 было помножено то число, которое первоначально съ этимъ множителемъ 3 были числа первыя между собою, т. е.

въ этомъ случаѣ на 3 было помножено число 7. Если-же данная сумма не дѣлится на три, то это значитъ, что на 3 было помножено то число, въ которое 3 входило множителемъ, т. е. 9. Точно также рѣшается эта задача и съ другими числами и множителями, лишь бы были соблюдены всѣ указанныя условiя.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Пусть первыя два числа будутъ A и B первыя между собою, а два другiя числа a и c также первыя между собою, причемъ A дѣлится на цѣло на a. Если A будетъ помножено на c, то сумма произведенiя будетъ:

$$Ac + Ba,$$

и эта сумма дѣлится на a, такъ какъ каждое изъ слагаемыхъ дѣлится на a.

Но, если A было помножено на a, то произведенiе будетъ

$$Aa + Bc,$$

и эта сумма уже не дѣлится на a, потому что, хотя первая часть и дѣлится на a, но вторая состоитъ изъ множителей B и c, которые съ a суть числа первыя между собою, а потому и произведенiе ихъ не можетъ дѣлиться на a.

Итакъ, смотря потому дѣлится или не дѣлится сумма произведенiй на a, можно узнать какое число было умножено на a.

ЗАДАЧА XII.

Отгадать нѣсколько задуманныхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое меньше 10.

Предложите умножить первое задуманное число на 2, затѣмъ прибавить 5, все помножить на 5 и къ произведенію прибавить 10; затѣмъ пусть прибавятъ второе задуманное число и сумму помножить на 10; къ этому прибавить третье задуманное число и, если было задумано еще какое нибудь число, то нужно, предварительно помноживъ все на 10, прибавить и это четвертое число, и такимъ образомъ должно помножать все на 10 передъ прибавленіемъ всякаго лишняго числа. Узнавъ результатъ, получившійся послѣ указанныхъ дѣйствій, если при этомъ было задумано только два числа, надо вычесть изъ него число 35; число десятковъ остатка будетъ первое задуманное число, а число единицъ остатка второе задуманное число. Если было задумано три числа, то изъ послѣдней суммы должно вычесть 350, и тогда число сотенъ остатка будетъ первое число, число десятковъ второе, и число единицъ третье число. Такимъ-же образомъ можно узнавать и большее количество задуманныхъ чиселъ. Такъ, если

задумано 4 числа, то нужно вычесть изъ послѣдней суммы 3500; число тысячъ остатка будетъ первое число; число сотенъ—второе, число десятковъ—третье, и число единицъ—четвертое задуманное число.

Положимъ, задуманы слѣдующія 4 числа: 3, 5, 8 и 2. Удвоенное первое число равно 6; къ нему надо прибавить 5, получимъ 11; 11 умноженное на 5 дастъ 55; прибавимъ 10 получится 65. Къ этому числу нужно прибавить второе число 5; будемъ имѣть 70; 70 умноженное на 10 дастъ 700; прибавивъ третье число, получимъ 708; умноженное на 10, оно дастъ 7080; наконецъ, прибавивъ послѣднее число, получимъ 7082. Вычтя изъ этого числа 3500, получимъ остатокъ 3582, въ который по порядку входятъ всѣ четыре задуманныя числа.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Пусть будутъ задуманы числа: a, b, c, d,... Для первыхъ двухъ чиселъ должны быть произведены слѣдующія вычисленія:

$$(2a + 5).\ 5 = 10a + 25;\ 10a + 25 + 10 = 10a + 35,$$
$$10a + 35 + b = 10a + b + 35.$$

Для третьяго числа:

$$(10a + b + 35).\ 10 + c = 100a + 10b + c + 350.$$

Для четвертаго:

$$(100a + 10b + c + 350).\ 10 + d$$
$$= 1000a + 100b + 10c + d + 3500.$$

И такъ далѣе для сколькихъ угодно чиселъ. Остатки по вычитаніи 35, или 350, или 3500, и т. д. будутъ

всегда заключать въ себѣ всѣ задуманныя числа по порядку.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Правила, приведенныя нами для рѣшенія этой общей задачи, многими примѣняются въ весьма разнообразныхъ играхъ.

Такъ этими правилами пользуются, чтобы узнать число очковъ на каждой изъ брошенныхъ костей, сколько-бы ихъ ни было. Наибольшее число очковъ каждой кости не превышаетъ 6, а потому этотъ случай и можетъ быть разрѣшенъ на основаніи указанныхъ выше правилъ.

Или на основаніи этихъ-же правилъ рѣшаютъ слѣдующую задачу: Отгадать, кто изъ нѣсколькихъ лицъ взялъ кольцо, въ какой оно рукѣ, на какомъ пальцѣ и на которомъ суставѣ. Въ этомъ случаѣ должно всѣхъ участвующихъ въ игрѣ расположить въ такомъ порядкѣ, чтобы каждому было присвоено число по мѣсту, которое онъ занимаетъ среди другихъ; затѣмъ одну изъ рукъ каждаго должно назвать первой, а другую второй; и такъ же поступить съ пятью пальцами каждой руки и съ суставами каждаго пальца. Легко видѣть, что эта задача сводится къ отысканію четырехъ задуманныхъ чиселъ, изъ которыхъ каждое не превышаетъ 10-и. Положимъ, что кольцо находится у четвертаго лица, во второй рукѣ, на пятомъ пальцѣ и на третьемъ суставѣ. Удвоимъ число лица, получимъ 8; къ этому прибавимъ 5 и помножимъ на 5; $(8+5).5=65$; прибавивъ сюда 10, получимъ 75. Сюда нужно прибавить число руки, помножить на 10, прибавить

число пальца, снова помножить на 10 и наконецъ прибавить число сустава:

$$75+2=77,\ 77\times10=770;\ 770+5=775;$$
$$775\times10=7750;\ 7750+5=7755.$$

Изъ послѣдней суммы 7755 должно вычесть 3500; въ остаткѣ получится число 4253, цифры котораго попорядку и суть тѣ числа, которыя мы должны были отыскать.

Если-бы мы хотѣли узнать только у кого изъ нѣсколькихъ лицъ находится кольцо и на которомъ пальцѣ, то это было бы все равно, что отыскивать два задуманныя числа. Въ этомъ случаѣ должно въ извѣстномъ порядкѣ числами обозначить 10 пальцевъ каждаго лица. Но, такъ какъ можетъ случиться, что кольцо будетъ надѣто на десятомъ пальцѣ, то съ прибавленіемъ къ числу десятковъ 10 (числа пальца) получится лишній десятокъ, а по вычитаніи 35, на мѣстѣ единицъ получится 0. Въ такомъ случаѣ надо уменьшить число десятковъ на 1 и объявить, что такое-то лицо имѣетъ кольцо на десятомъ пальцѣ: Положимъ, кольцо находится у 6-го лица на десятомъ пальцѣ; удвоенное число лица $=12$; прибавивъ 5 имѣемъ 17; 17 помноженное на $5=85$; прибавивъ сюда 10, получимъ 95, и наконецъ, прибавивъ число пальца 10, получимъ число 105. Если отсюда вычтемъ 35, то разность будетъ равна 70; и тогда очевидно, что число десятковъ превышаетъ число лица на единицу. Чтобы измѣнить способъ рѣшенія этой задачи, надо обратить вниманіе на то, что было нами сказано въ замѣчаніи къ задачѣ IV. Потому что, хотя и нельзя измѣнять въ этомъ случаѣ множителей (передъ прибавленіемъ каждаго числа вся предъидущая сумма умножается на 10), однако тѣмъ не менѣе можно произвести нѣкоторыя измѣненія.

Напр. умножить на 2 и потомъ на 5 все равно, что умножить на 10, поэтому можно первое число прямо умножать на 10; или можно сначала умножать на 5, а потомъ на 2. Точно также вмѣсто того, чтобы помножать послѣ прибавленія каждаго числа всю сумму на 10, можно умножать сначала на 5, а потомъ на 2, или наоборотъ.

Затѣмъ, чтобы скрыть способъ, которымъ рѣшаютъ задачу, можно измѣнять и числа, которыя въ разное время прибавляются, и сумма которыхъ вычитается въ концѣ. Пусть будутъ задуманы четыре числа: 4, 2, 5 и 3. Помножимъ первое число на 5; $4 . 5 = 20$; прибавимъ къ этому числу не 5, какъ прежде, а 8; $20 + 8 = 28$; удвоимъ: $28 . 2 = 56$; прибавимъ второе задуманное число и помножимъ все на 10: $(56 + 2) . 10 = 580$; къ этому прибавимъ 12, получимъ 592. Затѣмъ прибавимъ третье число, удвоимъ сумму, прибавимъ 6 и помножимъ на 5; $592 + 5 = 597$; $597 . 2 = 1194$; $1194 + 6 = 1200$; $1200 . 5 = 6000$; прибавивъ наконецъ последнее число 3, получимъ 6003. Для того, чтобы узнать какое число должно отсюда вычесть, посмотримъ какія числа мы прибавляли и какимъ они подвергались измѣненіямъ. Первоначально мы прибавили 8, но затѣмъ сумма была умножена на 2, поэтому мы какъ будто прибавили 16; отъ умноженія на 10 прибавленное число увеличилось до 160. Затѣмъ было прибавлено еще 12, и того 172. Это число отъ умноженія на 2 увеличилось до 344; потомъ мы прибавили 6, итого 350; наконецъ, отъ умноженія на пять прибавленное нами число увеличилось до 1750. Поэтому мы и должны изъ послѣдней суммы вычесть это число, и тогда получится число, 4253, въ которое по порядку входятъ всѣ задуманныя числа.

ЗАДАЧА XIII.

Нѣкто взялъ въ двѣ руки по нѣкоторому количеству марокъ, число ихъ не извѣстно, а извѣстно только отношеніе числа марокъ въ одной рукѣ къ числу марокъ въ другой; узнать послѣ нѣсколькихъ переложеній, сколько марокъ осталось въ одной изъ рукъ.

Пусть нѣкое лице А возьметъ въ двѣ руки по нѣкоторому числу марокъ и объявитъ, въ какой пропорціи находятся эти 2 числа между собою. Напримѣръ: пусть въ правой рукѣ будетъ 15 марокъ, въ лѣвой 12; тогда число марокъ въ правой рукѣ будетъ относиться къ числу марокъ въ лѣвой, какъ $5 : 4$, т. е. показатель отношенія будетъ $\frac{5}{4}$, или $1\frac{1}{4}$. Затѣмъ пусть А переложитъ изъ лѣвой руки въ правую какое нибудь количество марокъ, разумѣется не болѣе чѣмъ сколько можно, и чтобы это количество заключало въ себѣ часть или части, которыми выражается показатель отношенія $\frac{5}{4}$, т. е., чтобы перелагаемое количество заключало въ себѣ четверти; въ данномъ случаѣ напр. можно взять 8. Затѣмъ пусть А переложитъ обратно изъ правой руки въ лѣвую такое количество марокъ, которое бы равнялось числу марокъ, остававшихся въ

лѣвой рукѣ, умноженному на показателя отношенія. Въ данномъ случаѣ надо переложить такое количество, какое оставалось въ лѣвой рукѣ, и еще четверть того же количества.

При первомъ переложеніи мы взяли изъ лѣвой руки 8 марокъ, слѣдовательно тамъ осталось 4, а въ правой рукѣ образовалось 23 марки; затѣмъ изъ правой руки переложили обратно въ лѣвую руку $\frac{5}{4}$ того количества, которое оставалось въ ней, т. е. въ данномъ случаѣ 5. Такимъ образомъ въ лѣвой рукѣ будетъ 9 марокъ. Чтобы узнать, сколько марокъ осталось послѣ двухъ перекладокъ въ правой рукѣ, нужно взять показателя отношенія, т. е. $1\frac{1}{4}$, прибавить къ нему 1, и на это число умножить то число, которое первый разъ было переложено изъ лѣвой руки въ правую, т. е. 8; $1^1/_4 + 1 = 2^1/_4$; $2^1/_4 \,.\, 8 = 18$; это и есть число марокъ, оставшихся въ правой рукѣ послѣ двухъ перекладокъ.

Другой примѣръ: лицо А взяло въ правую руку 39 марокъ, а въ лѣвую 15, гдѣ показатель отношенія равенъ $^{13}/_5$. Теперь нужно переложить изъ лѣвой руки въ правую такое число марокъ, которое дѣлилось-бы на пять (имѣло-бы пятыя части), напр: 10. Тогда въ правой рукѣ будетъ 49 марокъ, а въ лѣвой 5. Затѣмъ нужно переложить обратно въ лѣвую руку количество марокъ, вдвое болѣе того, какое оставалось въ ней, и еще $\frac{3}{5}$ тогоже количества ($^{13}/_5 = 2\frac{3}{5}$), т. е. надо переложить 13 марокъ, а всего въ лѣвой рукѣ будетъ 18. Для того, чтобы узнать, сколько осталось марокъ въ правой рукѣ, надо къ показателю отношенія прибавить 1 и на полученную сумму умножить число, которое было переложено въ первый разъ, т. е. 10.

$$2\tfrac{3}{5} + 1 = 3\tfrac{3}{5};\ 3\tfrac{3}{5} \,.\, 10 = 36.$$

Это и есть число марокъ, оставшихся въ правой рукѣ.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Пусть a и b два количества марокъ, и $\frac{m}{n}$ отношеніе между ними. Мы отнимаемъ отъ числа b какое нибудь число p и прибавляемъ его къ a, которое тогда превращается въ $a + p$, а другое обратится въ $b - p$. Отъ $a + p$ отнимемъ $\frac{m}{n}$ $(b - p)$, и тогда получимъ, такъ какъ $a = b \,.\, \frac{m}{n}$,

$$\frac{m}{n}\ b + p \quad \frac{m}{n}\ (b - p),$$

что равно $\left(1 + \frac{m}{n}\right) p$. Эта формула объясняетъ предложенныя нами правила для рѣшенія этой задачи.

Замѣчаніе I. Изъ этого объясненія видно, что p можетъ быть всякое число меньшее b, и если Башэ и совѣтуетъ, чтобы это число было кратное отъ n, то это для того только, чтобы избѣжать дробей.

Замѣчаніе II. Башэ совѣтуетъ также p вычитать изъ меньшаго числа; но въ объясненіи его мы не видимъ, чтобы b было менѣе a. Нужно только, если p вычитается изъ b, брать отношеніе отъ a къ b, а если p вычитается изъ a, то брать отношеніе отъ b къ a, т. е. $\frac{m}{n}$.

ЗАДАЧА XIV.

Дѣлая то же, что и въ предъидущей задачѣ, узнать послѣ такого же количества переложеній, сколько марокъ осталось въ каждой рукѣ и по скольку ихъ было сначала.

Возьмемъ случай, который мы брали въ предъидущей задачѣ. Въ правой рукѣ находится 15 марокъ, въ лѣвой 12. Переложимъ изъ лѣвой руки въ правую 8 марокъ и обратно изъ правой въ лѣвую такое число марокъ, какое оставалось въ ней и еще четверть того же количества. Зная, на основаніи предъидущаго правила, чему равняется число марокъ въ правой рукѣ, не нужно открывать этого и, узнавъ какое отношеніе существуетъ между количествами марокъ послѣ перекладокъ, очень легко узнать число марокъ въ лѣвой рукѣ. Такъ въ нашемъ примѣрѣ, если намъ скажутъ, что послѣ перекладокъ въ правой рукѣ въ два раза болѣе марокъ, чѣмъ въ лѣвой, то, зная что въ правой рукѣ находится 18 марокъ, не трудно видѣть, что въ лѣвой должно находиться 9 марокъ. Такимъ образомъ легко и понятно разрѣшается первая часть нашей задачи.

Чтобы узнать, сколько было сначала марокъ въ каждой рукѣ, то, какъ сумма всѣхъ марокъ извѣстна изъ первой части этой задачи ($18 + 9 = 27$), а также извѣстно, что сначала число марокъ правой руки было въ $1^1/_4$ раза болѣе числа марокъ лѣвой, нужно раздѣлить извѣстную сумму 27 на двѣ части, которыя относились бы между собою какъ $5 : 4$. Такое отношеніе существуетъ между числами 15 и 12.

ПРИМѢЧАНІЕ.

Въ каждой ариѳметикѣ находятся указанія на то, какъ должно дѣлить какое нибудь число на части, пропорціональныя другимъ даннымъ числамъ. Мы напомнимъ только самое правило: *число, подлежащее дѣленію на пропорціональныя части, послѣдовательно умножается на каждое изъ данныхъ чиселъ и каждое произведеніе дѣлится на сумму этихъ чиселъ.*

Такъ, для какого нибудь количества a, котораго части должны быть пропорціональны m, n и p, части эти будутъ:

$$\frac{a \times m}{m + n + p}, \quad \frac{a \times n}{m + n + p}, \quad \frac{a \times p}{m + n + p}.$$

ЗАДАЧА XV.

Отгадать сумму очковъ, выкинутыхъ игральными костями.

Положимъ, что кѣмъ нибудь брошены три кости. Пусть кто нибудь сложитъ число очковъ этихъ костей; потомъ, оставивъ на столѣ одну изъ костей въ томъ положенiи въ какомъ она упала, остальныя двѣ перевернетъ и сумму очковъ, находящихся на противоположной сторонѣ, прибавитъ къ прежде полученной суммѣ. Затѣмъ нужно снова бросить эти двѣ кости, и сумму выкинутыхъ очковъ прибавить къ предъидущимъ суммамъ. Далѣе, изъ двухъ костей оставить одну нетронутою, а другую перевернуть, и число очковъ, находившихся на нижней сторонѣ, прибавить къ общей суммѣ очковъ и, наконецъ, бросивъ еще разъ эту третью кость, снова прибавить число выкинутыхъ очковъ къ общей суммѣ, самую же кость оставить на столѣ, какъ и предъидущiя.

Сумма всѣхъ выкинутыхъ очковъ найдется, если къ числу очковъ на костяхъ, лежащихъ на столѣ, прибавить число 21.

Положимъ, первый разъ на костяхъ были выкинуты

5, 3 и 2 очка, сумма которыхъ 10. Оставимъ на столѣ одну изъ этихъ костей, напр. 5, а другiя перевернемъ и сумму очковъ, лежащихъ на противоположныхъ сторонахъ, прибавимъ къ 10. На противоположной сторонѣ кости, на которой мы выкинули 3 очка, мы найдемъ 4, а на кости, гдѣ было выкинуто 2 очка, 5; сумма ихъ равна 9, и, прибавивъ ее къ 10 получимъ 19. Затѣмъ эти двѣ кости должны быть брошены еще разъ, и пусть на этотъ разъ выброшенныя очки будутъ 4 съ 1; прибавивъ сумму ихъ 5 къ 19, получимъ 24. Оставимъ на столѣ кость съ 4 очками и къ общей суммѣ очковъ прибавимъ число очковъ, находящихся на противоположной сторонѣ кости съ 1 очкомъ, т. е. 6 очковъ, получимъ 30. Наконецъ бросимъ еще разъ послѣднюю кость, и число выкинутыхъ очковъ, напр. 2, прибавимъ также къ общей суммѣ, которая такимъ образомъ будетъ равна 32. На столѣ кости будутъ лежать съ 5, 4 и 2 очками и, если къ суммѣ этихъ очковъ мы прибавимъ 21, то получимъ 32, сумму всѣхъ выкинутыхъ очковъ.

ОБЪЯСНЕНIЕ.

Задача эта для всѣхъ, кто не знаетъ ея, покажется чрезвычайно замысловатою, но на самомъ дѣлѣ рѣшенiе ея не представляетъ ничего особеннаго и основано на строенiи самыхъ костей, которыя всѣ устроены такимъ образомъ, что сумма очковъ на двухъ противоположныхъ сторонахъ всегда равна 7. Если напр., на одной сторонѣ 1 очко, то на другой мы непремѣнно найдемъ 6, если на одной 2, то на другой 5 и т. д. Поэтому, прибавляя сумму очковъ на двухъ противоположныхъ сторонахъ кости, мы всегда прибавляемъ

7. Въ данномъ случаѣ мы прибавляли три раза сумму противолежащихъ на костяхъ очковъ, что все равно, что три раза прибавить по 7, или прибавить 21; а потому для того, чтобы найти сумму всѣхъ выкинутыхъ указаннымъ способомъ очковъ, нужно къ суммѣ очковъ, оставшихся на столѣ, прибавить 21.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Эту же задачу можно рѣшать съ большимъ количествомъ костей, нужно при этомъ только обращать вниманіе на то, сколько разъ прибавляются противолежащія очки, и столькоже разъ прибавить 7 къ оставшимся на столѣ костямъ. Еслибы было брошено 4 кости, то, поступая какъ было указано, мы увидимъ, что сумма противолежащихъ очковъ прибавлялась 6 разъ, а потому къ оставшимся костямъ надо прибавить 42 ($6 \cdot 7 = 42$). При пяти костяхъ придется прибавить 70 для того, чтобы получить сумму всѣхъ выкинутыхъ очковъ.

ЗАДАЧА XVI.

Отгадать число очковъ выброшенной изъ колоды карты, пересмотрѣвъ по одному только разу остальныя карты.

Надо взять колоду въ 52 карты и дать кому нибудь вытащить одну карту. Чтобы отгадать, сколько очковъ на вытащенной картѣ, надо взять остальныя и, считая туза за 1, всѣ фигуры за 10, а остальныя карты по числу очковъ, прибавлять число очковъ одной карты послѣдовательно къ числу очковъ слѣдующей и т. д., отбрасывая десятки, и такъ до послѣдней карты. Вычтя число единицъ, которое остается у насъ изъ 10, получимъ число очковъ вытащенной карты. Если же мы въ концѣ получимъ 10, то и число очковъ взятой карты также 10.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Объяснить это рѣшеніе очень легко; стоитъ только доказать, что сумма очковъ всѣхъ картъ есть число кратное отъ 10, а это доказать не трудно, нужно только сосчитать количество очковъ колоды. Колода состоитъ: изъ 16 картъ по 10 очковъ каждая (3 фигуры и десятка

каждой масти), и затѣмъ сумма очковъ остальныхъ 36 картъ равна 180 (45 въ каждой масти). Поэтому, если мы будемъ складывать очки первой карты съ очками второй, къ этой суммѣ прибавлять третью карту и т. д. до послѣдней, отбрасывая десятки, то сумма очковъ послѣдней карты съ очками вытащенной карты должна быть равна 10. Слѣдовательно число очковъ вытащенной карты получится если послѣдній остатокъ вычесть изъ 10; и если послѣдній остатокъ будетъ 10, то и вытащенная карта имѣетъ 10 очковъ.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Понявъ это объясненіе, не трудно будетъ отыскать и другіе способы для рѣшенія нашей задачи. Такъ, напримѣръ, эту задачу можно дѣлать со сколькими угодно картами, сосчитавъ только предварительно сумму всѣхъ картъ колоды. Въ пикетной колодѣ въ 36 картъ, принимая туза за 1, сумма очковъ всѣхъ картъ равна 284. Число это хотя и не дѣлится на 10, но тѣмъ не менѣе задача можетъ быть рѣшена, какъ прежде, нужно только съ самаго начала отбросить 4 очка, а затѣмъ уже до самаго конца отбрасывать опять десятки. Послѣдняя сумма непремѣнно должна дать 10 очковъ.

Затѣмъ можно измѣнять и то число, которое откидывается съ постепеннымъ прибавленіемъ картъ и изъ котораго въ концѣ вычитаютъ послѣдній остатокъ, чтобы узнать очки вытащенной карты. Число это можетъ быть взято ad libitum, только оно ни въ какомъ случаѣ не должно быть меньше числа очковъ наибольшей карты. Такъ, вмѣсто 10, можно бы взять 11, 12 или 13 и т. д. При этомъ необходимо обратить вниманіе

на то, содержится-ли выбранное число цѣлое число разъ въ общей суммѣ очковъ колоды, что узнается посредствомъ дѣленія. Если сумма очковъ не дѣлится на это число безъ остатка, то при складываніи очковъ картъ должно отбросить этотъ остатокъ съ самаго начала, точно такъ какъ, выше мы отбросили 4, прежде чѣмъ начали отбрасывать десятки. Наконецъ можно измѣнить рѣшеніе этой задачи и тѣмъ, что фигуры будутъ считаться не за 10 очковъ каждая, а напримѣръ такъ: валетъ будетъ считаться за 11, дама за 12, король за 13. Въ такомъ случаѣ, пересмотрѣвъ два раза всѣ карты, можно узнать не только число очковъ вытащенной карты, но и масть ея. Сумма очковъ колоды будетъ равна 364, числу, которое дѣлится на 13; поэтому откидывая 13 всякій разъ, когда при сложеніи сумма очковъ превысить это число, мы узнаемъ число очковъ вытащенной карты, если послѣдній остатокъ вычтемъ изъ 13. Чтобы узнать масть карты, надо посмотрѣть, какой изъ четырехъ картъ колоды, соотвѣтствующихъ найденному числу очковъ, недостаетъ; это и будетъ вытащенная карта. Если остатокъ не получится вовсе, то вытащенная карта—король.

ЗАДАЧА XVII.

Отгадать число очковъ на трехъ картахъ.

Предложите кому нибудь изъ колоды въ 52 карты выбрать 3, и пусть онъ къ каждой изъ нихъ прибавитъ еще изъ колоды столько, сколько въ этой картѣ недостаетъ очковъ до 15. Затѣмъ, сосчитавъ сколько осталось картъ, надо вычесть изъ нихъ 4; число очковъ взятыхъ трехъ картъ будетъ равно числу оставшихся картъ.

Пусть очки взятыхъ картъ будутъ 4, 7, 9. Очевидно въ первой картѣ до 15 недостаетъ 11, во второй 8, въ третьей 6. Отнимемъ изъ колоды 25 картъ (11+8+6); останется 24, изъ которыхъ по вычитаніи 4, останется 20; это и есть сумма очковъ трехъ выбранныхъ картъ.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Для удобства объясненія предположимъ, что было выбрано три карты съ наименьшимъ числомъ очковъ, напр. три туза, изъ которыхъ каждый считается за 1 очко. Здѣсь, очевидно, къ каждой картѣ надо прибавить 14, чтобы составилось требуемое число 15. Сумма трехъ выбранныхъ картъ съ числомъ картъ, къ нимъ прибавленныхъ, будетъ тогда равна 45. Если мы вычтемъ это число изъ общаго числа картъ колоды 52, то въ остаткѣ получимъ 7, откуда, если вычесть 4, получимъ 3, число очковъ на выбранныхъ трехъ картахъ. Отсюда легко видѣть почему мы всегда должны вычитать 4 изъ числа оставшихся картъ. Съ увеличеніемъ числа очковъ на выбранныхъ картахъ, соотвѣтственно уменьшается число прибавляемыхъ картъ и, вмѣстѣ съ тѣмъ, на тоже количество увеличивается число остающихся картъ; поэтому разность отъ вычитанія изъ этого количества 4-хъ будетъ всегда равна суммѣ очковъ 3 выбранныхъ картъ. Для примѣра, пусть вмѣсто перваго туза будетъ взята шестерка; тогда сумма очковъ трехъ картъ увеличится на 5; но въ то же время, вмѣсто 14 картъ, которыя прежде нужно было прибавлять къ первой картѣ, теперь нужно прибавить всего 9, т. е. на 5 менѣе; число-же картъ увеличится при этомъ также на 5.

ДРУГОЕ ОБЪЯСНЕНІЕ.

Пусть n будетъ число картъ колоды; a, b, c числа очковъ выбранныхъ картъ и p то число, которое должно составиться черезъ прибавленіе къ числу очковъ каждой выбранной карты извѣстнаго количества картъ, считая каждую за 1. Число картъ, которое должно быть прибавлено къ a, будетъ тогда $p - a$, число прибавляемыхъ къ b $p-b$ и къ c $p-c$. Если сюда прибавить три сначала взятыя карты и оставшіяся, которыя мы обозначимъ черезъ r, то получится n, число всѣхъ

картъ колоды. Такимъ образомъ составится слѣдующее уравненіе:

$$(p-a)+(p-b)+(p-c)+3+r=n,$$

откуда

$$a+b+c=r+(3p+3)-n.$$

При $n=52$ и $p=15$, получимъ: $a+b+c=r-4$.
При $n=32$ и $p=15$, получимъ: $a+b+c=r+16$.

Отсюда можно вывести слѣдующее общее правило: *Должно утроить число, которое мы составляемъ черезъ прибавленіе къ числу очковъ каждой изъ трехъ картъ извѣстнаго числа картъ изъ колоды; къ этому прибавить 3; затѣмъ, вычтя это число изъ числа сѣхъ картъ, разность прибавить или же вычесть изъ числа оставшихся картъ, смотря потому, будетъ ли она положительная или отрицательная, т. е. будетъ ли полученная нами сумма болѣе, или менѣе числа всѣхъ картъ колоды.*

При $n=36$, $p=11$, мы получимъ: $3p+3-n=0$;

слѣдовательно $a+b+c=r$.

Примѣчаніе 1.—Нѣтъ необходимости, чтобы p было одно и то-же количество для всѣхъ трехъ картъ; можно взять три разныя p, q, s, но тогда, вмѣсто $3p$, надо подставить въ формулу сумму:

$$p+q+s.$$

Примѣчаніе 2. — Для четырехъ выбранныхъ картъ мы получили бы формулу:

$$a+b+c+d=r+(4p+4)-n;$$

для пяти картъ:

$$a+b+c+d+e=r+(5p+5)-n; \text{ и т. д.}$$

Примѣчаніе 3.—Можетъ случиться, что недостанетъ картъ для составленія трехъ разъ количества p; тогда нужно, узнавъ, чему равняется недостающее число q, поступать такъ, какъ будто задача дѣлалась при $n+q$ картахъ; остатокъ же r будетъ равенъ o. Формула будетъ:

$$a+b+c=(3p+3)-(n+q).$$

ЗАДАЧА XVIII.

Узнать, которая изъ нѣсколькихъ картъ, расположенныхъ въ извѣстномъ порядкѣ, была кѣмъ-нибудь задумана.

Разложите 15 картъ въ три горизонтальные ряда, такъ чтобы во всякомъ ряду было по 5 картъ, и пусть кто-нибудь задумаетъ одну изъ нихъ. Затѣмъ соберите отдѣльно карты каждаго ряда и сложите всѣ вмѣстѣ такъ, чтобы тотъ рядъ, изъ котораго была задумана карта, пришелся въ серединѣ. Затѣмъ снова разложите карты по 5 въ рядъ, но на этотъ разъ въ другомъ порядкѣ, а именно: вертикальными рядами. Снова спросите въ которомъ горизонтальномъ ряду находится задуманная карта; и затѣмъ, собравъ карты, какъ было указано выше, разложите ихъ опять вертикальными рядами. Наконецъ спросите еще разъ, въ которомъ изъ горизонтальныхъ рядовъ находится задуманная карта, и вы узнаете ее, отсчитавъ третью въ указанномъ ряду. Или можно также, собравъ снова карты, какъ было показано выше, найти задуманную карту, отсчитавъ изъ 15 картъ 8 (среднюю).

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Чтобы объяснить непогрѣшимость этого способа, мы должны доказать, что послѣ трехъ раскладокъ, сдѣланныхъ указаннымъ нами способомъ, задуманная карта непремѣнно будетъ третьею въ томъ ряду, въ которомъ она находится. Собравъ карты, какъ было указано, мы знаемъ, что задуманная карта есть одна изъ пяти картъ того ряда, который положенъ нами въ середину. Затѣмъ, когда мы вторично разложимъ карты, онѣ попадутъ въ различные ряды. Посмотримъ, куда лягутъ пять картъ того ряда, гдѣ была задуманная карта.

1-ая карта упадетъ на второе мѣсто третьяго ряда.
2-ая карта упадетъ на третье мѣсто перваго ряда.
3-я карта упадетъ на третье мѣсто втораго ряда.
4-ая карта упадетъ на третье мѣсто третьяго ряда.
5-ая карта упадетъ на четвертое мѣсто перваго ряда.

Изображая черезъ о карты рядовъ, гдѣ не находится задуманная карта, а черезъ і карты, между которыми она находится, получимъ слѣдующія расположенія:

1ое *расположеніе.*	2ое *расположеніе.*
о о о о о	о о і і о
і і і і і	о о і о о
о о о о о	о і і о о

Поэтому, если задуманная карта при второмъ расположеніи будетъ находиться въ первомъ ряду, то, очевидно, это третья или четвертая этого ряда. При третьемъ расположеніи обѣ эти карты лягутъ третьими въ двухъ сосѣднихъ рядахъ (2 и 3).

Если послѣ втораго расположенія задуманная карта будетъ находиться во второмъ ряду, то это можетъ быть только третья этого ряда. И наконецъ, если послѣ вторичнаго расположенія задуманная карта будетъ находиться въ третьемъ ряду, то это будетъ непремѣнно или вторая или третья карта этого ряда; и при третьемъ расположеніи обѣ эти карты лягутъ третьими: одна въ первомъ, другая во второмъ ряду. Итакъ задуманная карта послѣ трехъ переложеній должна быть всегда третьею въ извѣстномъ ряду. Что и требовалось доказать.

Другое объясненіе.

Объясненіе Бошэ, очевидно, имѣетъ въ виду частный случай и не показываетъ, можетъ-ли всегда задуманная карта, при нечетномъ количествѣ картъ, расположенныхъ поравну въ нечетномъ количествѣ рядовъ, очутиться среднею между другими картами своего ряда.

Пусть n будетъ число картъ каждаго ряда и t число рядовъ. Въ началѣ задуманная карта находится между n картъ средняго ряда; при слѣдующемъ расположеніи эти n картъ распредѣлятся по t рядамъ, и, если n, раздѣленное на t, дастъ въ частномъ цѣлое число e, то эти карты расположатся по t рядамъ такъ, что въ серединѣ каждаго ряда образуются группы по e картъ изъ ряда, въ которомъ сначала находилась задуманная карта.

1ое *расположеніе.*	2ое *расположеніе.*
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 1 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 0 1 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 1 0 0 0

То-же будетъ и далѣе, если частное e дѣлится на t; и то-же, если новое частное f будетъ дѣлиться на t; и т. д., такъ что задуманная карта будетъ всегда лежать въ извѣстной группѣ картъ, занимающей середину игры, когда рядъ, въ которомъ она находилась, былъ положенъ посреди другихъ. Если такимъ образомъ дѣленіе частныхъ на t будетъ производиться нацѣло, пока не получится въ частномъ 1, то задуманная карта будетъ находиться посреди всей игры, если рядъ, въ которомъ она легла въ послѣдній разъ, былъ положенъ посреди другихъ рядовъ. Но, какъ только одно изъ частныхъ не будетъ болѣе цѣлымъ числомъ, карты изъ ряда, въ которомъ находилась передъ тѣмъ задуманная карта, уже не лягутъ равными группами по срединѣ каждаго новаго ряда. Это мы можемъ видѣть изъ слѣдующаго примѣра, гдѣ мы имѣемъ 5 рядовъ по 9 картъ.

1ое *расположеніе.*	2ое *расположеніе.*
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 1 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 1 1 0 0 0
1 1 1 1 1 1 1 1 1	0 0 0 0 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 1 1 0 0 0 0

Въ подобномъ случаѣ, если задуманная карта не попала въ средній рядъ, она можетъ попасть въ одну изъ группъ, которая не занимаетъ середины ряда, какъ въ указанной фигурѣ группы двухъ верхнихъ и двухъ нижнихъ рядовъ. Тогда достаточно одинъ изъ нолей замѣстить черезъ 1, чтобы имѣть право сказать, что задуманная карта находится въ группѣ, которая впослѣдствіи можетъ занять середину всей игры. Такъ, если

мы предположимъ, что задуманная карта находится въ послѣднемъ ряду (2-ое расположеніе), то, замѣнивъ о, предшествующій первой единицѣ, также единицей, когда этотъ рядъ будетъ положенъ по срединѣ другихъ рядовъ, задуманная карта очутится въ группѣ картъ, лежащихъ въ самой срединѣ игры.

Разсуждая такимъ образомъ и при слѣдующихъ поправкахъ, въ концѣ концовъ задуманная карта все-таки окажется въ срединѣ всей игры.

Теперь остается узнать, послѣ скольких раскладокъ она непремѣнно попадетъ въ средину игры. Изъ предъидущихъ объясненій видно, что по раздѣленіи n на t, если частное e цѣлое число, то и его нужно раздѣлить на t и т. д., пока въ частномъ будутъ получаться цѣлыя числа. Когда-же получится дробное частное, то ближайшее большее цѣлое число будетъ выражать maximum числа картъ, между которыми можетъ находиться задуманная карта въ одномъ ряду соотвѣтствующаго расположенія. Но, если этотъ maximum четное число, нужно прибавить къ нему 1, чтобы получить группу картъ (между которыми находится задуманная), которая можетъ быть помѣщена въ срединѣ игры. Поступая такимъ-же образомъ, должно раздѣлить и эту группу на t, и т. д., пока частное получится равнымъ единицѣ или будетъ менѣе единицы; тогда число дѣленій на t будетъ наибольшимъ количествомъ раскладокъ, которыя необходимы для разрѣшенія этой задачи. Во всякомъ случаѣ, не слѣдуетъ опасаться произвести лишнюю раскладку, такъ какъ, если задуманная карта разъ попала въ средину игры, она останется тамъ, сколько бы разъ послѣ того ни перекладывать карты.

Если мы обратимъ вниманіе на n картъ того ряда, который первоначально былъ положенъ посреди дру-

гихъ рядовъ, то замѣтимъ, что эти карты при слѣдующей раскладкѣ расположатся такимъ образомъ, что, если n не превышаетъ t (числа рядовъ), онѣ займутъ весь средній вертикальный рядъ. Слѣдовательно при слѣдующей раскладкѣ, задуманная карта должна находиться по срединѣ колоды.

Если мы возьмемъ $n>t$, но чтобы оно не превышало t^2, то n среднихъ картъ при слѣдующей раскладкѣ займутъ болѣе одного вертикальнаго ряда, но во всякомъ случаѣ не болѣе t рядовъ, и самые эти ряды будутъ находиться по срединѣ, такъ что, собравъ карты, мы можемъ быть увѣрены, что задуманная карта находиться между t картъ середины игры. При новой раскладкѣ, которая распредѣлитъ эти t картъ по t рядамъ, задуманная карта будетъ среднею въ своемъ ряду, а слѣдовательно и во всей игрѣ, когда ряды собраны въ опредѣленномъ порядкѣ.

Мы увидимъ также, что, если $n>t^2$, но не $>t^3$, то необходимо три раскладки (кромѣ первой). Продолжая разсуждать подобнымъ образомъ, мы найдемъ, что число необходимыхъ раскладокъ всегда равно степени d, въ которую нужно возвести t, чтобы получить число равное или большее n.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Зная, на чемъ основывается эта задача, можно рѣшать ее со сколькими угодно картами, и многими другими способами, потому что вся хитрость состоитъ здѣсь въ томъ, что карты одного ряда посредствомъ извѣстной перекладки разъединяются и раскладываются по разнымъ рядамъ. Разъяснимъ это вполнѣ на слѣдующемъ легкомъ примѣрѣ. Возьмемъ 16 картъ и располо-

жимъ ихъ въ двухъ рядахъ такъ, чтобы 8 лежало по одну сторону, а другія 8 по другую. Тогда, зная въ какомъ ряду лежитъ задуманная карта, мы знаемъ, что она одна изъ 8 этого ряда. Соберемъ карты каждаго ряда отдѣльно и будемъ ихъ раскладывать такимъ образомъ: первую положимъ въ первый рядъ, вторую во второй, третью опять въ первый и т. д. до послѣдней. Тогда ясно, что изъ 8 картъ, между которыми находится задуманная, на каждую сторону упадетъ по четыре карты, поэтому, спросивъ, въ какомъ ряду находится теперь задуманная карта, мы будемъ знать, что это одна изъ четырехъ. Снова соберемъ и разложимъ карты, какъ было сдѣлано выше, и тогда эти четыре карты раздѣлятся по двѣ на каждую сторону; задуманная карта будетъ слѣдовательно одна изъ двухъ. Наконецъ разложимъ еще разъ карты, эти двѣ карты раздѣлятся по одной на каждый рядъ, поэтому, зная рядъ, въ которомъ находится задуманная карта, ничего не стоитъ указать ее.

Чтобы сдѣлать быстрѣе эту-же задачу, мы можемъ расположить 16 картъ въ 4 ряда по четыре карты въ каждомъ; и тогда, узнавъ, въ которомъ ряду находится задуманная карта, и разложивъ еще разъ карты выше указаннымъ образомъ, мы увидимъ, что 4 карты того ряда, гдѣ находится задуманная карта, распредѣлятся по одной въ каждый рядъ. Тутъ уже легко найти задуманную карту.

Пользуясь указанными правилами, нѣкоторые дѣлаютъ слѣдующій довольно интересный, хотя слишкомъ простой фокусъ: угадываютъ нѣсколько картъ, задуманныхъ нѣсколькими лицами. Дѣлается это такимъ образомъ. Четыремъ лицамъ раздается по четыре карты, изъ которыхъ каждый задумываетъ по одной. Затѣмъ карты, данныя каждому, кладутся по очереди

четырьмя отдѣльными горизонтальными рядами и у каждаго въ той-же очереди спрашивается: въ которомъ изъ вертикальныхъ рядовъ лежитъ его карта? Разумѣется, карта перваго лица будетъ лежать первою въ своемъ рядѣ, карта втораго второю, карта третьяго третьею и карта четвертаго четвертою. Тоже можно сдѣлать и съ большимъ числомъ лицъ и задуманныхъ картъ, нужно только, чтобы число картъ, изъ которыхъ каждому предоставляется задумать одну, всегда равнялось числу лицъ, а слѣдовательно и числу задуманныхъ картъ.

Вотъ что было сказано нами объ этой задачѣ въ первомъ изданіи этой книги, но въ этомъ изданіи мы предложимъ новый способъ рѣшенія этой задачи, который замысловатѣе всѣхъ предъидущихъ. Возьмите такое число картъ, которое бы равнялось произведенію двухъ ближайшихъ чиселъ, т. е. промежутокъ между которыми равенъ 1; напр.: 12—произведеніе 3 и 4; 20 произведеніе 4 и 5; 30—произведеніе 5 и 6 и т. д. Затѣмъ разложите карты по двѣ вмѣстѣ и предложите кому нибудь задумать одну изъ паръ. Потомъ, собравъ карты по двѣ, какъ онѣ лежали, надо расположить ихъ продолговатымъ четыреугольникомъ, въ которомъ одна сторона равнялась-бы большему множителю числа взятыхъ картъ, а другая сторона—меньшему. Самыя карты должно раскладывать такъ: первыя три рядомъ, четвертую подъ первую, 5-ю рядомъ съ 3-й, 6-ю подъ 4-ю, 7-ю рядомъ съ 5-й, и т. д., пока не образуются двѣ стороны четыреугольника, который, какъ было сказано выше, долженъ быть построенъ. При 20 картахъ, слѣдовательно, большая сторона четыреугольника будетъ состоять изъ 5 картъ, а меньшая изъ 4. Прибавивъ къ разложеннымъ семи картамъ осьмую, такъ чтобы она легла подъ шестую, мы и получимъ двѣ

стороны четыреугольника, въ которомъ одна сторона будетъ состоять изъ 5 картъ: 1, 2, 3, 5, 7, а другая изъ 4: 1, 4, 6 и 8. Остальныя карты мы будемъ раскладывать въ такомъ же порядкѣ; рядомъ съ 4-ю во второмъ ряду положимъ 9-ю, 10-ю и 11-ю; затѣмъ 12-ю положимъ подъ 9-ю, потомъ 13-ю радомъ съ 11-ю и 14-ю подъ 12-й; затѣмъ рядомъ съ 12-й положимъ опять три карты: 15-ю, 16-ю и 17-ю; и наконецъ 18-ю, 19-ю и 20-ю рядомъ съ 14-й.

Такъ какъ мы не можемъ 20 различныхъ картъ обозначить числомъ очковъ каждой, то мы просто возьмемъ 20 чиселъ, отъ 1 до 20 включительно, и предположимъ, что онѣ были первоначачально разложены по двѣ такъ, что, собранныя, легли въ томъ же порядкѣ отъ 1 до 20.

Раскладывая ихъ теперь въ указанномъ выше порядкѣ, мы получимъ слѣдующую форму:

A	1	2	3	5	7	B
C	4	9	10	11	13	D
E	6	12	15	16	17	F
G	8	14	18	19	20	H

Теперь нужно спросить: въ одномъ ли ряду находится пара задуманныхъ чиселъ, или въ двухъ, и въ какомъ именно? Если скажутъ, что оба числа находятся въ одномъ ряду (должно брать горизонтальные ряды: AB, CD и т. д.), то эти два числа непремѣнно стоятъ рядомъ, и первое изъ нихъ занимаетъ въ своемъ ряду то-же мѣсто, какое самый рядъ занимаетъ среди

прочихъ рядовъ. Такъ, если задуманныя числа будутъ находиться въ третьемъ ряду, первое изъ нихъ будетъ занимать третье мѣсто этого ряда, т. е. задуманы числа 15 и 16. Должно обратить особенное вниманіе на числа: 1 и 2 въ первомъ ряду, 9 и 10 во второмъ, 15 и 16 въ третьемъ, и 19 и 20 въ послѣднемъ; мы будемъ ихъ называть ключами задачи, потому что онѣ не только служатъ для отгадыванія задуманныхъ чиселъ, когда послѣднія находятся въ одномъ и томъже ряду, но и тогда, когда они находятся въ разныхъ рядахъ. Въ послѣднемъ случаѣ, узнавъ ряды, въ которыхъ находятся задуманныя числа, мы должны взять ключъ высшаго ряда и посмотрѣть какое число стоитъ въ клѣткѣ низшаго ряда подъ первымъ числомъ этого ключа; это и будетъ одно изъ задуманныхъ чиселъ. Второе-же найдется, если мы возьмемъ число, которое въ горизонтальномъ ряду того-же ключа отстоитъ отъ втораго числа этого ключа на столько, на сколько отъ перваго числа отстоитъ первое найденное число. Напр., если задуманы числа 7 и 8, и намъ скажутъ, что они находятся въ первомъ и послѣднемъ рядахъ. Возьмемъ ключъ верхняго ряда и отыщемъ число стоящее въ нижнемъ ряду подъ первымъ числомъ этого ключа, это и будетъ одно изъ задуманныхъ чиселъ. Чтобы отыскать второе, возьмемъ число, которое въ верхнемъ ряду отстоитъ отъ втораго числа ключа этого ряда на столько, на сколько отысканное задуманное число 8 отстоитъ отъ перваго числа ключа; найдемъ 7, второе задуманное число. Если намъ скажутъ, что задуманныя числа находятся во второмъ и четвертомъ рядахъ, то, поступая какъ прежде, мы найдемъ, что были задуманы числа: 14 и 13.

Объясненіе это основано на тѣхъ-же правилахъ, какъ и предыдущія; потому что очевидно, что въ каждый

рядъ, изъ прежде разложенныхъ паръ, попадаетъ только по одной, а остальныя пары разбиваются такъ, что одна карта попадаетъ въ одинъ рядъ, а другая въ другой. Главное состоитъ въ томъ, чтобы разложить карты, какъ мы указали. Для большей ясности мы представимъ здѣсь двѣ фигуры, изъ которыхъ на одной расположено 30 чиселъ, а на другой 42.

1	2	3	5	7	9
4	11	12	13	15	17
6	14	19	20	21	23
8	16	22	25	26	27
10	18	24	28	29	30

1	2	3	5	7	9	11
4	13	14	15	17	19	21
6	16	23	24	25	27	29
8	18	26	31	32	33	35
10	20	28	34	37	38	39
12	22	30	36	40	41	42

Можно также предложить заразъ нѣсколькимъ лицамъ задумать по парѣ картъ.

ЗАДАЧА XIX.

Узнать, которая изъ нѣсколькихъ картъ была задумана.

Возьмите какое нибудь число картъ и показывайте ихъ кому нибудь одну за другой, кладя на столъ крапомъ вверхъ, и пусть это лицо задумаетъ одну изъ нихъ и запомнитъ, которою она была показана по счету *), и затѣмъ скажите, что вы можете сдѣлать такъ, что, начиная считать съ верхней карты, заставите задуманную карту упасть подъ какимъ угодно числомъ, равнымъ ли числу всѣхъ употребленныхъ для этого фокуса картъ или большимъ этого числа. Спросивъ, которою по счету задуманная карта была въ числѣ показанныхъ, начните считать съ этого числа съ верхней карты; карта, которая упадетъ подъ числомъ всѣхъ картъ, и будетъ задуманная. Если хотите, чтобы карта упала подъ числомъ большимъ числа всѣхъ картъ, то стоитъ только на столько же увеличить число, съ котораго начнется счетъ.

*) Оставшіяся карты положите сверху показанныхъ.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Положимъ, что будетъ задумана седьмая карта изъ показанныхъ, и что всѣхъ картъ въ игрѣ 20. Чтобы придти отъ задуманной карты къ верхней, мы должны послѣдовательно считать карты

7, 8, 9, 10, ... 18, 19, 20,

или, прибавляя какое нибудь число, напр. 3,

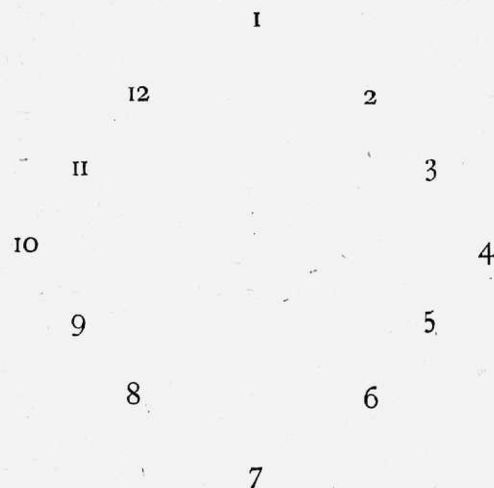
10, 11, 12, 13, ... 21, 22, 23;

слѣдовательно подъ этимъ-же числомъ должна упасть и задуманная карта, если мы начнемъ считать съ верхней. Въ нашемъ примѣрѣ, въ первомъ случаѣ она упадетъ при счетѣ 20, а во второмъ при 23.

ЗАДАЧА XX.

Изъ нѣсколькихъ чиселъ, начиная съ единицы, по порядку росположенныхъ по кругу, отгадать задуманное число.

Возьмемъ числа отъ 1 до 12, расположенныя въ кругѣ



Положимъ, кто нибудь задумалъ число 5; предложите ему дотронуться до какого нибудь другаго числа круга, напр. до 9-й. Мы попадемъ отъ 5 къ 9, считая: 5, 6,

7, 8, 9; а также отъ 9 къ 5, считая въ обратномъ направленія тѣ-же числа: 9, 8, 7, 6, 5. Если мы въ послѣднемъ случаѣ начнемъ считать отъ 9 включительно: 5, 6, 7, 8, 9, то 9 придется на 5-и; и, если мы обойдемъ отсюда еще цѣлый кругъ въ томъ-же направленіи, то опять придемъ къ 5-и; а это все равно что, отправляясь отъ 9-и и начавъ счетъ съ 5-и, просчитать по кругу до 9 + 12, т. е. до 21.

Если, наоборотъ, было задумано 9, а дотронулись до 5-и, то мы дойдемъ отъ 9-и до 5-и, считая впередъ по кругу: 10, 11, 12, 12 + 1, 12 + 2, 12 + 3, 12 + 4, 12 + 5, т. е. 17; слѣдовательно мы придемъ отъ 5 къ 9, считая тѣ же числа по кругу въ обратномъ направленіи.

Отсюда мы выводимъ слѣдующее правило, по которому можно отгадывать задуманное число: *Къ числу, до котораго кто нибудь дотронулся, прибавить наибольшее число круга; затѣмъ, пусть лицо, задумавшее число, отправляясь отъ числа, до котораго дотронулось, въ обратномъ направленіи по кругу, и начиная счетъ съ задуманнаго числа, отсчитаетъ найденную нами сумму. Число, на которомъ онъ остановится, будетъ непремѣнно задуманное имъ число.*

Примѣчаніе. Очевидно, что къ числу, до котораго дотронулись, можно прибавить нѣсколько разъ наибольшее число круга; точно также можно увеличивать и количество чиселъ въ кругѣ.

Можно дѣлать этотъ фокусъ и съ картами, которыя можно даже перевернуть, запомнивъ однако ихъ положеніе.

ЗАДАЧА XXI.

Разложить въ три ряда первыя девять картъ, начиная съ туза до девятки, такъ, чтобы сумма очковъ во всѣхъ рядахъ, какъ вертикальныхъ, такъ и горизонтальныхъ и по діагоналямъ, была всегда одна и та-же,

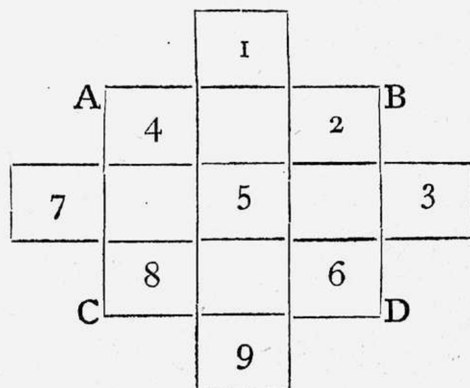
	H	L	N	
A	4	9	2	D
C	3	5	7	B
E	8	1	6	F
	G	K	M	

Для объясненія смысла этой задачи, а также и способа ея рѣшенія, мы ничего не можемъ сдѣлать лучше, какъ представить рядомъ помѣщенную фигуру, въ которой первыя 9 чиселъ расположены въ трехъ рядахъ такимъ образомъ, что суммы каждаго изъ рядовъ AB, CD, EF, равна 15; затѣмъ сумма рядовъ GH, KL, MN, также равны каждая 15; наконецъ и числа расположенныя по діагоналямъ также въ каждой составляютъ сумму 15. Что касается общаго правила, по которому можно располагать такимъ образомъ всѣ числа отъ 1 до какого нибудь квадратного числа, мы скажемъ объ этомъ въ объясненіе къ этой задачѣ.

ОБЪЯСНЕНІЕ.

Во многихъ сочиненіяхъ можно встрѣтить, что числа отъ единицы до одного изъ 7-ми квадратныхъ чиселъ (начиная съ 9) 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, расположены указаннымъ выше образомъ, но нигдѣ не указаны правила для подобныхъ расположеній. Намъ удалось послѣ многихъ трудовъ отыскать очень удобный и легкій способъ для всѣхъ нечетныхъ квадратовъ; но для четныхъ квадратовъ мы до сихъ поръ не нашли сколько нибудь совершенныхъ правилъ. Что-же касается правила для нечетныхъ квадратовъ, то вотъ оно. Построимъ полный квадратъ ABCD (фиг. 1), и раздѣлимъ каждую его сторону на столько частей, сколько чиселъ должно быть на каждой сторонѣ квадрата, который мы составляемъ.

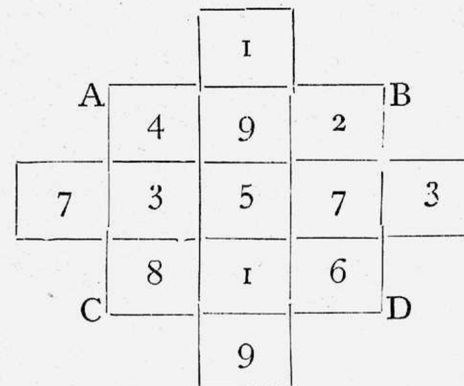
Фиг. 1.



Затѣмъ проведемъ параллельныя линіи черезъ всѣ точки дѣленія, какъ вдоль, такъ и поперекъ; тогда весь квадратъ окажется раздѣленнымъ на столько квадратиковъ, сколько мы должны размѣстить чиселъ.

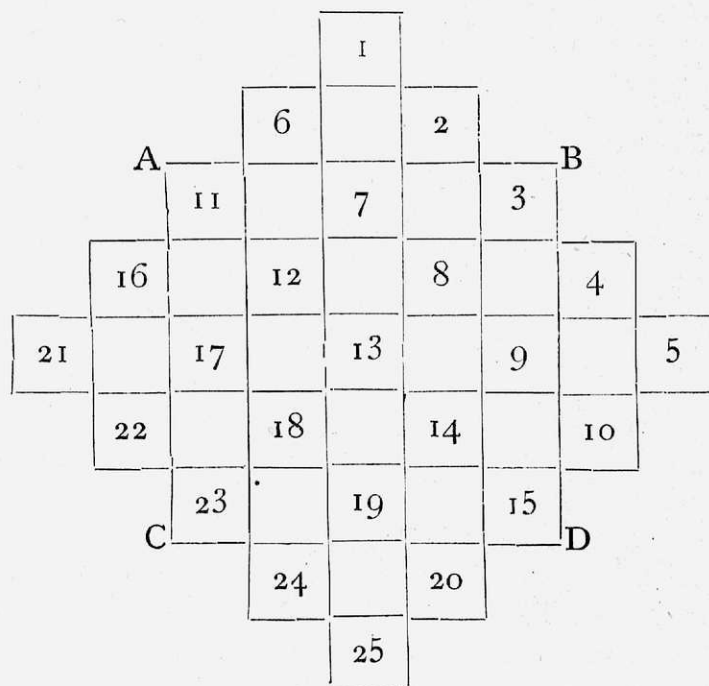
Такъ, если мы хотимъ размѣстить 9 чиселъ, то весь квадратъ ABCD будетъ раздѣленъ на 9 маленькихъ квадратиковъ, какъ мы можемъ видѣть на фигурѣ. Затѣмъ, продолживъ эти параллельныя линіи внѣ квадрата, построимъ новые маленькіе квадраты на подобіе предыдущихъ, которыхъ число, постепенно уменьшаясь, дошло-бы наконецъ до одного маленькаго квадрата. Тогда расположимъ наши числа въ ихъ естественномъ порядкѣ такимъ образомъ: первое число поставимъ въ верхнемъ квадратикѣ, 2-е и 3-е въ сосѣд-

Фиг. 2.



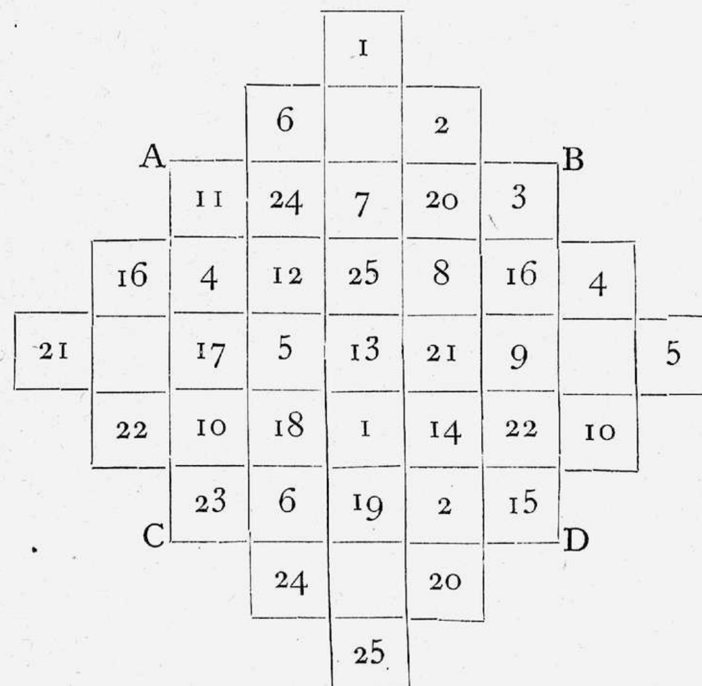
нихъ квадратахъ по той же діагонали, спускающейся сверху внизъ; въ три квадрата слѣдующей діагонали поставимъ 4, 5, 6, и наконецъ въ послѣдней 7, 8, 9 (см. фиг. 1). Числа, которыя попали въ квадратъ ABCD, поставлены на мѣстахъ, на которыхъ онѣ и должны стоять; эти числа суть: 2, 4, 5, 6, 8. Остальныя числа, не попавшія въ квадратъ, должны быть перенесены внего, такъ чтобы верхнія поставить внизу, нижнія вверху, правыя на лѣвую сторону, и лѣвыя на правую (см. фиг. 2). Такимъ образомъ всѣ числа будутъ размѣщены въ требуемомъ порядкѣ. При этомъ должно

замѣтить, что по общему правилу число, не попавшее въ квадратъ, должно перенести въ томъ же ряду на столько мѣстъ, на сколько частей дѣлится сторона квадрата. Такъ въ нашемъ примѣрѣ нужно переставлять числа на 3 мѣста, такъ какъ мы взяли 9, квадратъ трехъ. Если же мы взяли бы квадраты 25 и 49, то пришлось бы число переставлять на 5 и на 7 мѣстъ, на томъ основаніи, что 25 есть квадратъ 5, а 49 квадратъ 7. Для большей наглядности мы въ новой фигурѣ расположимъ числа отъ 1 до 25.



Здѣсь 25 чиселъ расположены въ требуемомъ порядкѣ, такъ какъ сумма каждаго ряда равна 65. Этимъ правиломъ можно пользоваться и для размѣщенія всякихъ другихъ чиселъ, лишь бы они были взяты въ

постоянной ариѳметической прогрессіи, не начинались бы съ 1 и чтобы разность прогрессіи была болѣе 1; напр. можно расположить 9 слѣдующихъ чиселъ: 4, 7, 10, 13..... 25, 28, которыя составляютъ ариѳметическую



ческую прогрессію при разности равной 3 *). Вотъ все, что я могу сказать касательно построенія нечетныхъ квадратовъ. Что-же касается до четныхъ квадратовъ, то, какъ я уже говорилъ, я не могъ для нихъ отыскать

*) Взявъ числа въ ариѳметической прогрессіи, можно быть увѣреннымъ въ составленіи квадрата; но можно его составить и съ другими числами; такъ квадратъ 25 можетъ быть построенъ съ числами: 2, 5, 7, 10, 12, 11, 15, 17, 20, 21, 22, 25, 27, 30, 31, 32, 35, 37, 40, 41, 42, 45, 47, 50 и 51.

сколько нибудь удовлетворительныхъ правилъ, хотя мнѣ и удалось построить всѣ четные квадраты до 100 и 144, что ранѣе меня никѣмъ не было сдѣлано *).

ПРИБАВЛЕНІЕ.

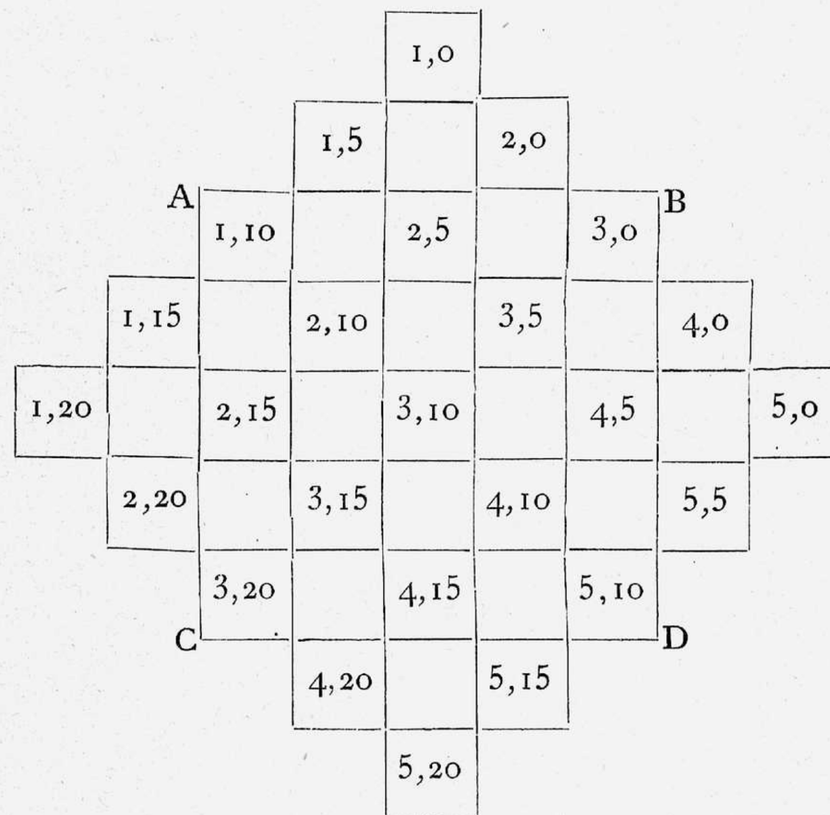
Мы постараемся объяснить способъ построенія нечетныхъ квадратовъ, которымъ пользовался Бошэ; затѣмъ представимъ нѣсколько другихъ способовъ для построенія тѣхъ-же квадратовъ и наконецъ общую систему для построенія четныхъ квадратовъ.

Возвращаясь къ первой фигурѣ квадрата 5-ти, мы видимъ, что, при сдѣланномъ нами размѣщеніи, наполнились числами обѣ діагонали: AD и BC. Далѣе мы видимъ, что числа каждой діагонали представляютъ ариѳметическую прогрессію изъ 5 чиселъ со среднимъ числомъ 13; сумма чиселъ поэтому равняется 13×5, т. е. пятой части всей суммы 13×25; слѣдовательно расположеніе чиселъ по діагоналямъ удовлетворяетъ требованію задачи. Чтобы уяснить себѣ горизонтальные и вертикальные ряды, предположимъ, что каждое число прогрессіи составлено изъ двухъ чиселъ, слѣдующимъ образомъ:

$1+0$, $2+0$, $3+0$, $4+0$, $5+0$,
$1+5$, $2+5$, $3+5$, $4+5$, $5+5$,
$1+10$, $2+10$, $3+10$, $4+10$, $5+10$,
$1+15$, $2+15$, $3+15$, $4+15$, $5+15$,
$1+20$, $2+20$, $3+20$, $4+20$, $5+20$,

*) Мы находимъ въ одномъ сочиненіи, напечатанномъ въ Мадритѣ въ 1599 году, фигуру представленную Башэ, а также построеніе всѣхъ квадратовъ до 16. Авторъ этого сочиненія Діего Паломино.

Такъ что каждое изъ чиселъ будетъ сочетаніемъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5 съ числами 0, 5, 10, 15, 20. Замѣнимъ въ этихъ сочетаніяхъ знакъ + запятою и подставимъ ихъ въ фигуру, придуманную Башэ, тогда получится слѣдующее размѣщеніе:



Мы имѣемъ такимъ образомъ десять діагоналей: пять, начиная съ верхняго квадрата, направляются вправо, и другія пять направляются влѣво; каждая изъ первыхъ содержитъ одно изъ чиселъ: 0, 5, 10, 15, 20; а каждая изъ вторыхъ діагоналей содержитъ одно

изъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5. Мы будемъ называть каждую діагональ тѣмъ числомъ, которое повторяется въ ней пять разъ. Каждое число стоитъ на пересѣченіи двухъ діагоналей, и слѣдовательно оно составлено изъ 2 чиселъ, пять разъ повторяющихся въ этихъ діагоналяхъ.

Опредѣливъ это, остановимся сначала на числахъ, которыя попали въ квадратъ ABCD. Ни въ одномъ изъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ мы не находимъ два раза одно изъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, потому что діагональ одного изъ этихъ чиселъ не можетъ два раза пересѣчь одинъ и тотъ-же горизонтальный или вертикальный рядъ. По той-же самой причинѣ мы не найдемъ въ одномъ и томъ-же ряду два раза одно изъ чиселъ: 0, 5, 10, 15, 20.

Обратимъ вниманіе теперь на одно изъ чиселъ, стоящихъ внѣ квадрата ABCD, напр. число (1, 5), которое находится надъ квадратомъ: ни число 1, ни число 5, не встрѣчаются въ квадратѣ въ вертикальномъ ряду, который проходитъ черезъ число (1, 5), такъ какъ діагонали этихъ чиселъ пересѣкаются внѣ квадрата. Діагонали 1 и 5, имѣя каждая только пять клѣтокъ, не пересѣкаютъ пятаго горизонтальнаго ряда, который находится подъ (1, 5); поэтому, если мы это число переведемъ внизъ въ этотъ горизонтальный рядъ, т. е. на пять рядовъ, то, такъ какъ нечетныя клѣтки пустыя, число (1, 5) попадетъ въ пустую клѣтку этого ряда. Если послѣ этого перемѣщенія мы обратимъ вниманіе на горизонтальный рядъ, то увидимъ, что ни одно изъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, а также чиселъ: 0, 5, 10, 15, 20, не повторяется въ немъ два раза. То-же будетъ и при перемѣщеніи другихъ чиселъ, стоящихъ поверхъ квадрата ABCD.

Разсуждая такимъ же образомъ, мы переведемъ во

внутрь квадрата числа, которыя очутились при расположеніи діагоналями ниже квадрата.

Что-же касается до чиселъ, которыя стоятъ внѣ квадрата по правую его сторону, и которыя должны быть перенесены на лѣвую сторону отъ средняго вертикальнаго ряда, то легко видѣть, что при перемѣщеніи ихъ, онѣ не встрѣтятся два раза ни въ одномъ изъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ. Напримѣръ, число (4, 0), будучи перенесено на пять клѣтокъ, упадетъ внѣ клѣтки, въ которой будетъ находиться, послѣ перенесенія снизу, число (4, 20). Слѣдовательно и при этомъ третьемъ перемѣщеніи ни въ одномъ изъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ не встрѣтится два раза одно изъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, или 0, 5, 10, 15 20.

При помощи тѣхъ же разсужденій переносятся и числа, стоящія внѣ квадрата, съ лѣвой его стороны, которыя размѣстятся въ квадратѣ справа отъ средняго вертикальнаго ряда.

Такъ какъ, когда всѣ клѣтки квадрата наполнятся, ни въ одномъ изъ горизонтальныхъ или вертикальныхъ рядовъ не встрѣтится два раза одно изъ чиселъ: 1, 2, 3, 4, 5, или одно изъ чиселъ: 0, 5, 10, 15, 20, и такъ какъ въ каждомъ ряду должно быть по десяти чиселъ, то, очевидно, во всякомъ ряду должны находиться всѣ названныя числа. Сумма каждаго ряда будетъ равна 13×5, т. е. 65, что доказываетъ вѣрность построенія.

Квадраты, построенные указаннымъ образомъ, мы будемъ называть *магическими квадратами*. Построеніе подобныхъ магическихъ квадратовъ можетъ быть всегда сдѣлано при помощи двухъ слѣдующихъ прогрессій:

$$1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\ r,$$
$$0,\ r,\ 2r,\ 3r, \ldots\ (r-1)r,$$

въ которыхъ r обозначаетъ сторону квадрата. Необходимо только при этомъ удовлетворить тремъ слѣдующимъ условіямъ:

1) Наполнить клѣтки одного квадрата r числами: 1, 2, 3,... r, написанными въ каждомъ изъ горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядовъ такимъ образомъ, чтобы суммы чиселъ всѣхъ рядовъ вертикальныхъ или горизонтальныхъ, а также и двухъ діагоналей, были равны между собой.

2) Наполнить клѣтки втораго квадрата r числами: 0, r, $2r$, $3r$,... $(r-1)r$, съ соблюденіемъ предыдущихъ условій.

3) Кромѣ того необходимо, чтобы оба эти квадрата были построены такъ, чтобы отъ сложенія чиселъ, находящихся въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ двухъ квадратовъ, получились бы все разныя числа.

Послѣ этого, очевидно, что, если мы въ третьемъ квадратѣ помѣстимъ суммы, полученныя отъ сложенія чиселъ двухъ квадратовъ въ тѣхъ-же клѣткахъ, въ которыхъ находились прежде числа, изъ которыхъ составились эти суммы, то у насъ образуется магическій квадратъ.

Представимъ здѣсь нѣсколько самыхъ интересныхъ системъ размѣщеній чиселъ.

§ 1. *Система діагоналей.*

Чтобы составить первый квадратъ, нужно написать въ первомъ горизонтальномъ ряду числа 1, 2, 3,... въ какомъ угодно порядкѣ, только бы среднее число пришлось въ одномъ изъ угловъ квадрата (въ нашей фигурѣ числа помѣщены черезъ одну клѣтку). Затѣмъ каждое изъ этихъ чиселъ вписываютъ по діагоналямъ въ томъ

направленіи, въ какомъ среднее число (4) занимаетъ полную діагональ квадрата, и, когда одна половина клѣтокъ квадрата будетъ наполнена, нужно наполнить такимъ же способомъ и другую половину, начиная съ того числа, которое было до того вписано только одинъ разъ.

Первый квадратъ.

1	5	2	6	3	7	4
5	2	6	3	7	4	1
2	6	3	7	4	1	5
6	3	7	4	1	5	2
3	7	4	1	5	2	6
7	4	1	5	2	6	3
4	1	5	2	6	3	7

Второй квадратъ образуется, вписывая въ 1-мъ горизонтальномъ ряду числа: 0, r, $2r$, $3r$,... въ какомъ бы то ни было порядкѣ, такъ чтобы среднее число находилось въ углу, противоположномъ тому, въ которомъ находится среднее число въ первомъ квадратѣ (въ нашей фигурѣ числа поставлены черезъ клѣтку, начиная съ послѣдней). Затѣмъ каждое изъ чиселъ вписываютъ по діагоналямъ въ томъ направленіи, въ какомъ среднее число занимаетъ цѣлую діагональ квадрата. Вторая половина квадрата наполняется такимъ-

же способомъ, какъ мы это дѣлали въ первомъ квадратѣ.

Второй квадратъ.

21	42	14	35	7	28	0
0	21	42	14	35	7	28
28	0	21	42	14	35	7
7	28	0	21	42	14	35
35	7	28	0	21	42	14
14	35	7	28	0	21	42
42	14	35	7	28	0	21

Соединивъ эти два квадрата въ одинъ посредствомъ сложенія чиселъ въ однѣхъ и тѣхъ же клѣткахъ, мы получимъ магическій квадратъ.

Такъ какъ въ первомъ горизонтальномъ ряду всѣ числа, кромѣ одного, могутъ быть расположены въ какомъ угодно порядкѣ, то мы можемъ составлять самыя разнообразныя фигуры размѣщеній чиселъ въ магическихъ квадратахъ. Одна изъ этихъ фигуръ и есть квадратъ Башэ; расположеніе чиселъ въ немъ соотвѣтствуетъ предыдущимъ квадратамъ. Мануэль Москопуль (Manuel Moscopoule), писатель болѣе древній, чѣмъ Башэ, но котораго рукопись не была извѣстна послѣднему, даетъ руководство для составленія магиче-

скаго квадрата прямо, безъ двухъ предварительныхъ квадратовъ. Вотъ въ чемъ состоитъ этотъ способъ.

Поставимъ 1 подъ клѣткой, занимающей самую середину квадрата; затѣмъ, спустившись по вертикальному ряду на одну клѣтку и подвинувшись по горизонтальному также на одну клѣтку, поставимъ число 2; потомъ по-прежнему спустившись и подвинувшись на одну клѣтку, поставимъ число 3 и т. д. (Дойдя по вертикальному ряду до низу или по горизонтальному

Магическій квадратъ.

22	47	16	41	10	35	4
5	23	48	17	42	11	29
30	6	24	49	18	36	12
13	31	7	25	43	19	37
38	14	32	1	26	44	20
21	39	8	33	2	27	45
46	15	40	9	34	3	28

ряду до конца, продолжать считать клѣтки съ первой въ слѣдующемъ ряду). Разставивъ указаннымъ образомъ 7 чиселъ соотвѣтственно числу клѣтокъ одной стороны квадрата, надо спуститься отъ послѣдняго числа на двѣ клѣтки и здѣсь поставить слѣдующее число; затѣмъ ставить всѣ слѣдующія числа до 2 r (r число цифръ стороны квадрата), какъ было указано для первыхъ чиселъ. Чтобы поставить слѣдующее число,

надо отъ числа 2 r спуститься на двѣ клѣтки и т. д. до послѣдняго числа.

§ 2. *Система горизонтальныхъ рядовъ.*

Мы обратимъ вниманіе только на одинъ случай построенія квадрата на основаніи этой системы, хотя ихъ можетъ быть очень много.

Чтобы составить первый квадратъ, въ первомъ горизонтальномъ ряду пишутъ, въ какомъ угодно порядкѣ, числа: 1, 2, 3,... r; затѣмъ тѣ-же числа, въ томъ же порядкѣ, но начиная съ числа, слѣдующаго за среднимъ числомъ перваго ряда, вписываютъ во второй горизонтальный рядъ. Отъ втораго ряда къ третьему и къ послѣдующимъ переходятъ, какъ отъ перваго ко второму.

Первый квадратъ.

5	3	1	4	2
4	2	5	3	1
3	1	4	2	5
2	5	3	1	4
1	4	2	5	3

Для составленія втораго квадрата: въ первый горизонтальный рядъ вписываютъ числа 0, r, 2, r, 3 r,... въ какомъ угодно порядкѣ; затѣмъ тѣ-же числа и

въ томъ-же порядкѣ, только начиная съ числа стоящаго по срединѣ предыдущаго ряда, вписываютъ въ клѣтки

Второй квадратъ.

5	15	0	10	20
0	10	20	5	15
20	5	15	0	10
15	0	10	20	5
10	20	5	15	0

втораго ряда и т. д. Отъ сложенія чиселъ, стоящихъ въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ этихъ двухъ квадратовъ, получается третій—*магическій квадратъ:*

10	18	1	14	22
4	12	25	8	16
23	6	19	2	15
17	5	13	21	9
11	24	7	20	3

Если въ первомъ квадратѣ наполнить первый горизонтальный рядъ числами 1, 2, 3,... r, ставя ихъ черезъ одну клѣтку, начиная со средней, и такимъ-же

образомъ, но въ обратномъ направленіи наполнить клѣтки перваго ряда втораго квадрата, то получится магическій квадратъ, извѣстный еще Москопулю, и для котораго послѣдній далъ слѣдующее правило.

Поставивъ въ серединѣ перваго ряда 1, спуститься по этому вертикальному ряду на 2 клѣтки и, подвинувшись по горизонтальному ряду на одну клѣтку, поставить число 2; затѣмъ, снова спустившись на двѣ клѣтки и подвинувшись на одну, поставить число 3; точно такъ же поступать и для слѣдующихъ чиселъ до r. Дойдя до числа r, чтобы поставить число $r+1$, надо спуститься въ томъ же ряду на четыре клѣтки; точно такъ же поступать и для $2r$, $3r$,... т. е., каждый разъ, когда кончается рядъ въ r чиселъ; самыя-же числа каждаго такого ряда должно размѣщать какъ первыя: 2, 3, 4,... r. Доходя ло конца горизонтальнаго или вертикальнаго ряда, поступать какъ было указано въ первомъ способѣ Москопуля.

Если первый горизонтальный рядъ перваго квадрата наполнить числами 2, 4, 6,... 1, 3, 5,... r, а слѣдующіе ряды наполнять, какъ мы это дѣлали выше, затѣмъ второй квадратъ составить, помѣщая числа: 0, r, $2r$... въ первомъ ряду, начиная съ средней клѣтки, а въ остальныхъ рядахъ, ставя въ среднюю клѣтку то число, которое въ предыдущемъ ряду слѣдовало за среднимъ числомъ, то получимъ магическій квадратъ *индѣйской* системы. Въ этомъ квадратѣ числа размѣщаются, поднимаясь и подвигаясь отъ предшествовавшаго числа на одну клѣтку; но числа: $r+1$, $2r+1$,... помѣщаются *подъ* числами r, $2r$,... (Вотъ квадратъ 9-ти, построенный по этому способу. См. стр. 95.)

Сохраняя въ прежнемъ порядкѣ числа въ первомъ горизонтальномъ ряду перваго квадрата, не измѣняя втораго квадрата и, передвигая эти числа на извѣстное

число клѣтокъ, можно, по желанію, помѣщать 1 въ этомъ первомъ квадратѣ, а также и въ магическомъ, въ каждой изъ клѣтокъ, гдѣ находятся числа 2, 3. 4,... r. Это нисколько не нарушитъ системы.

47	58	69	80	1	12	23	34	45
57	68	79	9	11	22	33	44	46
67	78	8	10	21	32	43	54	56
77	7	18	20	31	42	53	55	66
6	17	19	30	41	52	63	65	76
16	27	29	40	51	62	64	75	5
26	28	39	50	61	72	74	4	15
36	38	49	60	71	73	3	14	25
37	48	59	70	81	2	13	24	35

§ 3. *Система горизонтальныхъ и вертикальныхъ рядовъ.*

Предыдущія системы приложимы только къ построенію нечетныхъ квадратовъ; мы теперь предложимъ систему для четныхъ квадратовъ.

Въ прогрессіяхъ: 1, 2, 3, 4,... r, и 0, r, $2r$, $3r$,... два числа, одинаково отстоящія отъ крайнихъ чиселъ,

равно какъ и эти крайнія числа, мы называемъ *дополнительными* числами.

Два горизонтальные ряда мы будемъ называть *соотвѣтствующими*, когда они находятся на одинаковомъ разстояніи отъ двухъ горизонтальныхъ боковъ квадрата. Точно также будемъ называть и вертикальные ряды, равно отстоящіе отъ вертикальныхъ сторонъ квадрата. Въ одномъ и томъ-же ряду крайнія клѣтки, равно какъ и равно отстоящія отъ нихъ, будутъ называться *соотвѣтствующими клѣтками*.

Чтобы составить первый квадратъ, наполняютъ первую діагональ числами: 1, 2, 3,... r, такъ чтобы соотвѣтствующія клѣтки были заняты дополнительными числами; затѣмъ наполняютъ вторую діагональ дополнительными числами тѣхъ чиселъ, которыя находятся въ первой діагонали, размѣщая ихъ въ соотвѣтствующія горизонтальныя клѣтки.

Первый квадратъ 6-ти.

1	5	4	3	2	6
6	2	4	3	5	1
6	5	3	4	2	1
1	5	3	4	2	6
6	2	3	4	5	1
1	2	4	3	5	6

Затѣмъ 1-ый вертикальный рядъ наполняютъ числами,

которыя уже попали въ рядъ, и ихъ дополнительными числами, такъ чтобы въ ряду было по одинаковому количеству этихъ чиселъ. Когда одинъ вертикальный рядъ такимъ образомъ наполненъ, надо наполнить соотвѣтствующій рядъ дополнительными числами тѣхъ чиселъ, которыя находятся въ первомъ ряду. Затѣмъ точно также наполнять второй и третій рядъ и соотвѣтствующіе ряды.

Чтобы составить второй квадратъ, надо сперва наполнить первую діагональ числами 0, r, $2r$, $3r$,... затѣмъ вторую наполнить дополнительными числами первой діагонали, помѣщая ихъ въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ вертикальныхъ рядовъ. Затѣмъ наполняютъ горизонтальные ряды, какъ наполняли въ первомъ квадратѣ вертикальные ряды; но при этомъ должно соблюдать особое правило.

Второй квадратъ 6-ти.

0	30	30	0	30	0
24	6	24	24	6	6
18	18	12	12	12	18
12	12	18	18	18	12
6	24	6	6	24	24
30	0	0	30	0	30

Если одинъ изъ горизонтальныхъ рядовъ и ему соотвѣтствующій рядъ въ первомъ квадратѣ содержатъ въ одномъ вертикальномъ ряду два дополнительныя числа, то должно во второмъ квадратѣ помѣстить одно и то-же число въ обѣ клѣтки, въ которыхъ въ первомъ квадратѣ помѣщаются эти два дополнительныя числа. Когда это условіе исполнено, продолжаютъ наполнять горизонтальные ряды, помѣщая всегда дополнительныя числа въ соотвѣтственныхъ вертикальныхъ рядахъ. Такъ въ первомъ квадратѣ 6-ти, первый горизонтальный рядъ и рядъ ему соотвѣтствующій содержатъ каждый по два дополнительныя числа: 5 и 2, поэтому во второмъ квадратѣ должно поставить, въ первомъ горизонтальномъ ряду, число 30, во второй и пятой клѣткахъ; тогда, очевидно, въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ вертикальныхъ рядовъ должны быть поставлены два 0. Во второмъ горизонтальномъ ряду и его соотвѣтствующемъ перваго квадрата мы находимъ дополнительныя числа 4 и 3 въ третьемъ и четвертомъ вертикальныхъ рядахъ, поэтому во второмъ квадратѣ мы должны число 24 поставить въ третьей и четвертой клѣткахъ втораго горизонтальнаго ряда. Наконецъ, въ третьемъ и соотвѣтствующемъ горизонтальныхъ рядахъ перваго квадрата мы находимъ 6 и 1 въ первомъ и послѣднемъ вертикальныхъ рядахъ, а потому во второмъ квадратѣ мы должны поставить 18 въ первой и послѣдней клѣткахъ третьяго горизонтальнаго ряда. Помѣщая затѣмъ въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ каждаго вертикальнаго ряда втораго квадрата дополнительныя числа, какъ было указано выше, и составляя суммы чиселъ въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ двухъ квадратовъ, получимъ магическій квадратъ (стр. 99):

1	35	34	3	32	6
30	8	28	27	11	7
24	23	15	16	14	19
13	17	21	22	20	18
12	26	9	10	29	25
31	2	4	33	5	36

Составимъ подобнымъ-же образомъ магическій квадратъ 10-ти. Построивъ первый квадратъ (смотри соотвѣтствующую фигуру) и наполнивъ діагонали втораго квадрата, обратимъ вниманіе на первый горизонтальный рядъ перваго квадрата и его соотвѣтствующій рядъ. Мы видимъ здѣсь, что числа 9, 8, 4, 7, 3, 2, перваго ряда имѣютъ въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ послѣдняго ряда дополнительныя числа; поэтому мы должны поставить въ тѣхъ клѣткахъ перваго горизонтальнаго ряда втораго квадрата одно и то-же число 90, а въ соотвѣтствующемъ ряду въ тѣхъ же клѣткахъ 0. Второй, пятый и шестой ряды перваго квадрата совершенно тождественны съ своими соотвѣтствующими рядами. Но въ третьемъ и осьмомъ рядахъ числа 10 и 1 суть числа дополнительныя, а потому должно то-же число 70 или то-же число 20 поставить въ крайнихъ клѣткахъ третьяго ряда втораго квадрата. Наконецъ, въ четвертомъ и седьмомъ горизонтальныхъ рядахъ перваго квадрата мы находимъ дополнительныя числа 5 и 6 въ пятомъ вертикальномъ рядѣ; поэтому число 30

или же число 60 должно помѣстить въ среднихъ клѣткахъ четвертаго горизонтальнаго ряда втораго квадрата.

Удовлетворивъ этому особому условію при построеніи вторыхъ квадратовъ, оставшіяся пустыми клѣтки наполняютъ по общему правилу парами дополнительными числами, такъ чтобы въ каждомъ ряду было по одинаковому числу тѣхъ и другихъ и чтобы въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ каждаго вертикальнаго ряда заключались дополнительныя числа.

Первый квадратъ 10-ти.

1	9	8	4	6	5	7	3	2	10
10	2	3	7	6	5	4	8	9	1
10	2	3	4	5	6	7	8	9	1
1	9	8	4	5	6	7	3	2	10
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
10	9	8	7	5	6	4	3	2	1
1	9	8	4	6	5	7	3	2	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10	2	3	7	6	5	4	8	9	1
1	2	3	7	6	5	4	8	9	10

Второй квадратъ 10-ти.

0	90	90	0	90	0	0	90	90	0
80	10	10	80	80	80	80	10	10	10
70	20	20	20	70	70	70	20	20	70
30	60	60	30	30	30	30	60	60	60
50	50	50	40	40	40	40	50	50	40
40	40	40	50	50	50	50	40	40	50
60	30	30	60	60	60	60	30	30	30
20	70	70	70	20	20	20	70	70	20
10	80	80	10	10	10	10	80	80	80
90	0	0	90	0	90	90	0	0	90

Отъ сложенія чиселъ въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ 2-хъ квадратовъ получимъ слѣдующій магическій квадратъ:

1	99	98	4	96	5	7	93	92	10
90	12	13	87	86	85	84	18	19	11
80	22	23	24	75	76	77	28	29	71
31	69	68	34	35	36	37	63	62	70
60	59	58	47	45	46	44	53	52	41
50	49	48	57	55	56	54	43	42	51
61	39	38	64	66	65	67	33	32	40
21	72	73	74	25	26	27	78	79	30
20	82	83	17	16	15	14	88	89	81
91	2	3	97	6	95	94	8	9	100

Построимъ теперь магическій квадратъ 8-ми.

(*См. стр. 103*).

Въ первыхъ двухъ квадратахъ мы наполняли діагонали, помѣщая въ нихъ по порядку числа: 1, 2, 3,.... 0, *r*, 2*r*, ...; но помѣщали эти числа такъ, чтобы въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ приходились дополнительныя числа.

Въ вдвое четныхъ квадратахъ можно сдѣлать такъ, чтобы въ первомъ квадратѣ было по парѣ одинаковыхъ горизонтальныхъ рядовъ и столько-же одинако-

Первый квадратъ 8-ми.

7	6	1	4	5	8	3	2
7	3	8	5	4	1	6	2
2	6	1	5	4	8	3	7
2	6	8	4	5	1	3	7
7	6	8	4	5	1	3	2
2	3	1	4	5	8	6	7
2	3	8	5	4	1	6	7
7	3	1	5	4	8	6	2

Второй квадратъ 8-ми.

8	48	48	8	8	48	48	8
56	0	0	56	0	56	0	56
40	16	40	16	16	40	16	40
24	24	24	32	32	32	32	24
32	32	32	24	24	24	24	32
16	40	16	40	40	16	40	16
0	56	56	0	56	0	56	0
48	8	8	48	48	8	8	48

Магическій квадратъ 8-ми.

15	54	49	12	13	56	51	10
63	3	8	61	4	57	6	58
42	22	41	21	20	48	19	47
26	30	32	36	37	33	35	31
39	38	40	28	29	25	27	34
18	43	17	44	45	24	46	23
2	59	64	5	60	1	62	7
55	11	9	53	52	16	14	50

выхъ соотвѣтствующихъ имъ рядовъ; тогда можно обойти то особое условіе, которое мы выше установили для построенія втораго квадрата, и наполнять горизонтальные ряды втораго квадрата на основаніи общаго правила для размѣщенія чиселъ въ вертикальныхъ рядахъ перваго квадрата. Вотъ примѣръ подобнаго построенія. *(См. стр. 105)*.

Особенный способъ размѣщенія чиселъ, который мы примѣнили къ горизонтальнымъ и вертикальнымъ рядамъ двухъ первыхъ квадратовъ, и законъ котораго очевиденъ, даетъ намъ точно такіе квадраты, какіе встрѣчаются у древнѣйшихъ писателей. Квадраты эти были заимствованы изъ *еврейскихъ талисмановъ*, по-

Первый квадратъ 8-ми.

8	2	3	5	4	6	7	1
1	7	6	4	5	3	2	8
1	7	6	4	5	3	2	8
8	2	3	5	4	6	7	1
8	2	3	5	4	6	7	1
1	7	6	4	5	3	2	8
1	7	6	4	5	3	2	8
8	2	3	5	4	6	7	1

Второй квадратъ 8-ми.

0	56	56	0	0	56	56	0
48	8	8	48	48	8	8	48
40	16	16	40	40	16	16	40
24	32	32	24	24	32	32	24
32	24	24	32	32	24	24	32
16	40	40	16	16	40	40	16
8	48	48	8	8	48	48	8
56	0	0	56	56	0	0	56

Магическій квадратъ 8-ми.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	3	2	61	60	6	7	57

этому въ нихъ число 1 всегда помѣщено съ правой стороны; но мы, чтобы объяснить способъ, изобрѣтенный Москопулемъ (Moscopoul) для постороенія вдвое четныхъ квадратовъ, будемъ помѣщать 1 слѣва. Вотъ какъ слѣдуетъ поступать въ этомъ случаѣ. Въ первомъ квадратѣ напишите въ горизонтальныхъ рядахъ послѣдовательно всѣ числа, которыя должны быть расположены въ магическомъ квадратѣ (стр. 107.)

Возьмите другой квадратъ и впишите въ немъ прежде всего діагонали перваго квадрата (предлагаемъ читателю сдѣлать эту фигуру, или слѣдить за объясненіями по предыдущему магическому квадрату, который должно представить себѣ перевернутымъ справа налѣво).

1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Затѣмъ вписывайте остальныя числа, сохраняя одни на прежнихъ мѣстахъ, а другія переставляя, какъ будетъ указано ниже.

Въ первомъ горизонтальномъ ряду должно сохранить 1, перемѣнить 2 и 3, оставить 4 и 5, замѣнить 6 и 7 и такъ далѣе до послѣдней цифры, которую должно сохранить.

Во второмъ горизонтальномъ ряду наоборотъ: замѣнить первое число, оставить слѣдующія два, затѣмъ замѣнить два числа, которыя слѣдуютъ затѣмъ, и т. д. до послѣдняго числа, которое должно замѣнить. Точно также должно поступать и при размѣщеніи чиселъ слѣдующихъ рядовъ. (Не должно забывать при этомъ, что въ соотвѣтствующихъ рядахъ должно сохранять и замѣнять числа въ соотвѣтствующихъ клѣткахъ.)

Что касается чиселъ, которыя выбрасываются изъ своихъ клѣтокъ, то ихъ нужно замѣнить тѣми, которыя въ соотвѣтствующемъ ряду на столько отстоятъ

отъ крайней правой клѣтки, на сколько первыя отстоятъ отъ лѣвой или наоборотъ. Такъ въ квадратѣ 8-ми, мы переставимъ числа: 2 и 63, 3 и 62, 6 и 59, 7 и 58; потомъ 9 и 56, 12 и 53, 13 и 52, и т. д. Сумма двухъ перестановленныхъ чиселъ равна суммѣ крайнихъ чиселъ прогрессіи, которая составляетъ квадратъ, потому что эти два числа всегда стоятъ на равномъ разстояніи отъ крайнихъ чиселъ прогрессіи.

Можно также составлять квадраты вдвое четныхъ чиселъ по другому способу, при которомъ нѣтъ надобности дѣлать два квадрата.

1		3			6		8
	10		12	13		15	
17		19			22		24
	26		28	29		31	
	34		36	37		39	
41		43			46		48
	50		52	53		55	
57		59			62		64

Клѣтки горизонтальныхъ рядовъ *черезъ одну* наполняются соотвѣтствующими своему мѣсту числами, но при томъ, когда первая клѣтка ряда занята числомъ, двѣ среднія должно оставить пустыми; когда-же первая клѣтка въ слѣдующемъ ряду не будетъ занята числомъ, то двѣ среднія клѣтки занимаются слѣдую-

щими по порядку числами, (соотвѣтствующіе ряды наполняются по общему правилу).

Помѣстивъ послѣднее число r^2, здѣсь 64, должно отъ этого числа, считая: 1, 2, 3, 4 и т. д., идти въ обратномъ направленіи и вписывать тѣ числа, которыя придутся на пустыхъ клѣткахъ. Тогда мы получимъ слѣдующій магическій квадратъ:

1	63	3	61	60	6	58	8
56	10	54	12	13	51	15	49
17	47	19	45	44	22	42	24
40	26	38	28	29	35	31	33
32	34	30	36	37	27	39	25
41	23	43	21	20	46	18	48
16	50	14	52	53	11	55	9
57	7	59	5	4	62	2	64

Представляемъ здѣсь квадратъ 4-хъ, построенный такимъ-же образомъ:

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Не смотря на значительную величину нашего прибавленія къ задачѣ XXI Башэ, мы только поверхностно разобрали вопросъ о магическихъ квадратахъ. Для лицъ, заинтересовавшихся ими мы, предлагаемъ здѣсь слѣдующій списокъ сочиненій: 1) Мемуары Парижской Академіи, томъ V, годы: 1705, 1710, 1750; 2) Мемуары иностранныхъ ученыхъ и нѣкоторые труды Ейлера, собранные въ *Commentationes Arithmeticae*. 3) Сочиненіе Diego Palomino, о которомъ мы уже говорили. 4) *Traité de Carrés sublimes, par Poipnard*, 5) *De Quadratis magicis commentatio, auctore C. Mollweide*. 6) *Du Royaume de Siam, par de La Loubère*. 7) *Arithmologia, par le P. Kircher*. 8) *Nouveaux Eléments de Géometrie (par MM. de Port-Royal)*. 9) *Nouveaux Eléments de Mathématiques, par Jean Prestet*. 10) *Récréations mathématiques, par Ozanam*.

ЗАДАЧА XXII.

Два лица спорятъ о томъ, кто изъ нихъ, говоря по очереди и какое нибудь число, которое однако не превышало-бы какого нибудь условнаго постояннаго числа, и послѣ того, какъ всѣ сказанныя обоими числа будутъ сложены между собою, первый дойдетъ до какого нибудь впередъ назначеннаго числа. Сдѣлать такъ, чтобы въ подобномъ состязаніи всегда придти первымъ къ назначенному числу.

Пусть 100 будетъ назначенное число; постоянное число, больше котораго нельзя сразу сказать, пусть будетъ 10, т. е. можно прибавлять къ предъидущимъ числамъ 10 и менѣе. Положимъ, первое лицо A говоритъ 7, второе B говоритъ 10; итого съ прежнимъ 17; потомъ A говоритъ 5; съ прежними 22; B говоритъ 8; всего 30 и т. д. Каждый по очереди говоритъ какое нибудь число не больше 10-и и выигрываетъ тотъ, кто ранѣе дойдетъ до 100. Чтобы остаться побѣдителемъ надо поступать слѣдующимъ образомъ. Прибавить къ постоянному числу 10 единицу и получившееся число и послѣдовательно вычитать изъ 100; получатся слѣдующія числа:

89, 78, 67, 56, 45, 34, 23, 12, 1.

(т. е., начиная отъ 1 всѣ кратныя числа отъ 11 + 1). Поэтому, если вы первый скажете 1, какое бы число ни сказалъ противникъ, онъ не можетъ помѣшать вамъ сказать затѣмъ такое число, которое съ прежними составило-бы 12; точно также далѣе вы всегда будете доходить до: 23-хъ, 34-хъ, 45-и, 56-и, 67-и, 78-и, 89-и, и наконецъ до 100. Изъ этого мы видимъ, что, если оба участника знаютъ эту задачу, выиграетъ непремѣнно тотъ, кто скажетъ первое число. Впрочемъ можно при рѣшеніи этой задачи употреблять и другія числа, чѣмъ 100 и 10, что мы и покажемъ въ примѣчаніи.

ПРИМѢЧАНІЕ.

Возьмемъ вмѣсто 100 другое число, напр: 120, тогда числа, на которыя должно обратить вниманіе, будутъ: 109, 98, 87, 76, 65, 54, 43, 32, 21, 10, (т. е. кратныя числа отъ 11 + 10). Очевидно, здѣсь также долженъ выиграть начинающій.

Или можно, оставивъ число 100, какъ и прежде, измѣнить постоянное число, выше котораго не можетъ быть сразу прибавлено къ предъидущимъ числамъ; такъ вмѣсто 10-ти возьмемъ 8. Тогда мы должны имѣть въ виду числа: 91, 82, 73, 64, 55, 46, 37, 28, 19, 10, 1, (т. е. начиная отъ 1 кратныя 9 и+1); выигрываетъ-же опять-таки начинающій. Но если мы возьмемъ за постоянное число 9, то числа, которыя должно имѣть въ виду, будутъ: 90, 80, 70, 60, 50, 40, 30, 20, 10; откуда видно, что начинающій можетъ проиграть, если противнику извѣстенъ секретъ задачи. Это потому, что начинающій, не имѣя права сказать числа болѣе 9-и, не можетъ дойти до 10, и вмѣстѣ съ тѣмъ

не можетъ помѣшать противнику дойти до этого числа, такъ какъ не можетъ сказать числа меньше единицы; тоже и для другихъ чиселъ: 20, 30, и т. д. до 100.

Но понятно само собою, что всѣ эти игры не дѣлаются обыкновенно съ тѣми, кто ихъ знаетъ, а съ тѣми, кому онѣ незнакомы. Поэтому, если противникъ не знаетъ этой задачи, не должно брать всегда всѣхъ чиселъ, на которыя мы указали выше, иначе смѣтливый человѣкъ легко можетъ догадаться въ чемъ дѣло. Сперва можно говорить другія, какія угодно числа и только, приближаясь къ назначенному конечному числу, надо постараться попасть на одно изъ необходимыхъ для выигрыша чиселъ.

ЗАДАЧА XXIII.

Извѣстное количество разныхъ чиселъ расположить рядомъ по порядку такимъ образомъ, чтобы, выбрасывая постоянно по счету девятое, или десятое и т. д., въ опредѣленномъ количествѣ, оставались-бы всегда тѣ числа, которыя мы пожелаемъ.

Эту задачу обыкновенно предлагаютъ въ такомъ видѣ:

Во время страшной бури въ морѣ на кораблѣ находятся 15 христіанъ и 15 турокъ; кормчій требуетъ, чтобы для спасенія корабля половина лицъ, находящихся на немъ, была выброшена въ море. Дѣло по общему согласію должно рѣшиться жребіемъ. Всѣ становятся въ рядъ и по счету 9-й выбрасывается въ море; и это продолжается до тѣхъ поръ, пока изъ 30 человѣкъ, бывшихъ на кораблѣ, останутся 15. Спрашивается: какимъ образомъ надо было расположить пассажировъ, чтобы жребій палъ на всѣхъ 15 турокъ и не коснулся ни одного христіанина?

Считая отъ 9 до 9 въ ряду изъ 30 предметовъ, мы попадаемъ на предметы, занимающіе 9-ое, 18-ое, и 27-ое мѣста. Отбросимъ эти предметы и будемъ продолжать

счетъ отъ 9 до 9, начиная съ трехъ чиселъ, слѣдующихъ за 27-ью, и возвращаясь къ началу ряда, въ которомъ осталось только 27 предметовъ. Тогда придется отбросить 6-ое, 15-ое и 24-ое числа этого ряда. Изъ новаго ряда въ 24 предмета выбросятся предметы, стоящіе на 6-мъ, 15-мъ, 24-мъ мѣстахъ этого ряда. Остается 21 предметъ, выкинувъ 9-ый и 18-ый предметы этого ряда, получимъ рядъ въ 19 предметовъ и т. д. Наконецъ, продолжая считать подобнымъ образомъ, мы дойдемъ до ряда въ 15 предметовъ. Если мы теперь посмотримъ, на какихъ мѣстахъ въ первомъ ряду стояли оставшіеся предметы, то увидимъ слѣдующее:

1, 2, 3, 4, ..., 10, 11, ., 13, 14, 15, ., 17, .., 20, 21, ..., 25, .., 28, 29, ..

Баше предлагаетъ слѣдующій способъ быстраго рѣшенія этой задачи. Нужно прежде всего запомнить эти два стиха:

Mort, tu ne falliras pas
En me livrant le trépas!

Нужно обратить все вниманіе на гласныя: *a*, *e*, *i*, *o*, *u*, принимая *a* за 1, *e* за 2, *i* за 3, *o* за 4, *u* за 5. Рѣшая нашу задачу, должно въ порядкѣ, въ которомъ стоятъ эти гласныя, помѣстить соотвѣтствующія имъ числа; затѣмъ составлять рядъ изъ христіанъ и турокъ такимъ образомъ, что сперва ставить столько христіанъ, сколько показываетъ первое число, потомъ столько турокъ, сколько показываетъ второе число, опять христіанъ, сколько показываетъ третье число и т. д.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Не трудно видѣть, насколько эта задача допускаетъ разнообразія. Прежде всего предметовъ можетъ быть

взято какое угодно число; напр., вмѣсто 30 можно взять 40, 50, 60 и т. д. и болѣе, и менѣе. Затѣмъ вмѣсто того чтобы отбрасывать девятый предметъ, можно отбрасывать шестой, или десятый и т. д.

Наконецъ можно выбрасывать не половину всѣхъ предметовъ, а болѣе, или менѣе.

При помощи подобнаго разсчета, по словамъ Эгезиппа въ III книгѣ Исторіи Іерусалимской войны, удалось спастись отъ смерти правителю Іотапаты, Іосифу. Послѣдній, спасаясь отъ преслѣдованія римлянъ, скрылся съ нѣкоторымъ числомъ своихъ солдатъ въ пещеру. Не видя возможности бѣгствомъ укрыться отъ непріятеля, Іосифъ предложилъ солдатамъ своимъ отдаться въ плѣнъ. Это предложеніе такъ возмутило ихъ, что они рѣшились лучше умереть, убивая другъ друга, и никакія убѣжденія Іосифа не могли отклонить ихъ отъ этого рѣшенія. Тогда-то Іосифъ и прибѣгнулъ къ тому способу, который мы употребляли при рѣшеніи послѣдней задачи. Эгезиппъ не говоритъ подробно о томъ, какъ Іосифъ размѣстилъ своихъ солдатъ, какъ онъ ихъ считалъ, который по счету убивался; но тѣмъ не менѣе изъ его словъ ясно видно, что только благодаря этой уловкѣ и удалось Іосифу спастись вмѣстѣ съ однимъ изъ солдатъ.

ЗАДАЧА XXIV.

Дано нѣсколько неравныхъ чиселъ; раздѣлить каждое изъ нихъ на двѣ части и найти два такія числа, чтобы суммы произведеній отъ умноженія одной изъ сказанныхъ частей на одно изъ чиселъ, а другой на другое, были для всѣхъ чиселъ одинаковы.

Возьмемъ сначала два числа a и b, изъ которыхъ первое больше втораго; и пусть x и $a - x$ двѣ части a, и y и $b - y$ двѣ части b; z и t два множителя, и первый болѣе втораго.

Должно получиться уравненіе:

$$xz + t(a - x) = yz + t(b - y);$$

откуда

$$x = y - \frac{(a - b)t}{z - t}. \qquad (1)$$

Посредствомъ этой формулы опредѣляется x, когда мы вмѣсто y возьмемъ какое нибудь число. Не должно забывать, что x и y обозначаютъ тѣ части a и b, которыя умножены на большаго изъ двухъ множителей.

Нужно, чтобы y, которое составляетъ часть b, было взято болѣе $\frac{(a - b)t}{z - t}$, и $\frac{(a - b)t}{z - t} < b$; отсюда видно, что нужно взять

$$z > \frac{at}{b} \qquad (2).$$

Этими двумя формулами разрѣшается задача.

Пусть даны два числа 18 и 40; возьмемъ $t = 3$; на основаніи формулы (2), нужно взять $z > \frac{40 \times 3}{18}$ или $> \frac{20}{3}$: поэтому положимъ $z = 14$; величина $\frac{(a-b)\,t}{z-t}$ обратится въ $\frac{22.3}{11}$ или 6.

Возьмемъ теперь въ 18-ти число большее 6, напр. 10, это будетъ y; и пусть соотвѣтствующая часть въ 40 будетъ 10—6 или 4.

Двѣ части 18 будетъ 10 и 8, которыя, умноженныя порознь на 14 и 3, даютъ произведенія 140 и 24, которыхъ сумма равна 164.

Двѣ части 40 суть 4 и 36, которыя отъ умноженія на 14 и 3 даютъ произведенія 56 и 108, и сумма ихъ равна опять 164.

Вмѣсто того, чтобы взять $z = 14$, возьмемъ $z = 7$: величина $\frac{(a-b)\,t}{z-t}$ обратится въ $\frac{22.3}{4}$ или $16\frac{1}{2}$.

Разложимъ 18 на части 17 и 1; тогда первая часть 40 будетъ

$$17 - 16\frac{1}{2}, \text{ или } \frac{1}{2}, \text{ а другая } 39\frac{1}{2}.$$

Сдѣлавъ умноженіе частей на 7 и 3 и сложивъ произведенія, получимъ въ обоихъ случаяхъ 122.

Умѣя рѣшать эту задачу для двухъ чиселъ, не трудно рѣшать ее и со сколькими угодно числами. Напр. возьмемъ числа: 18, 40 и 50.

Пусть $t = 3$; z мы опредѣлимъ изъ формулы (2), взявъ только вмѣсто a наибольшее изъ 3 данныхъ чиселъ—50; получимъ

$$z > \frac{50.3}{18}, \text{ или } 8\frac{1}{3}; \text{ поэтому возьмемъ } z = 10.$$

Величина $\frac{(a-b)\,t}{z-t}$ для втораго числа обратится въ $\frac{22.3}{7}$ или $9\frac{3}{7}$, а для третьяго въ число $\frac{32.3}{7}$ или $13\frac{5}{7}$. Возьмемъ въ 18-ти часть большую $13\frac{5}{7}$, напр. 15; соотвѣтствующія части въ другихъ числахъ будутъ: $15 - 9\frac{3}{7}$ или $5\frac{4}{7}$, и $15 - 13\frac{5}{7}$, или $1\frac{2}{7}$; такъ что три данныя числа разложатся на слѣдующія части:

$$15 \text{ и } 3,\ 5\frac{4}{7} \text{ и } 34\frac{3}{7},\ 1\frac{2}{7} \text{ и } 48\frac{5}{7}.$$

Умножая одну изъ частей каждаго числа на 10, а другую на 3, найдемъ, что сумма произведеній во всѣхъ числахъ будетъ 159.

Эта задача обыкновенно предлагается въ другой формѣ. Напр три лица привозятъ на рынокъ для продажи по нѣсколько мѣръ зерна; одно лицо привозитъ 10 мѣръ, другое 12 и третье 15; товаръ продается по одной и той-же цѣнѣ и каждый выручаетъ столько-же, сколько другіе. Спрашивается: какъ была произведена продажа?

Если продаваемые предметы недѣлимы, должно рѣшать задачу при помощи цѣлыхъ чиселъ, чѣмъ и занимается исключительно Башэ, взявъ примѣръ, въ которомъ три женщины продаютъ на рынкѣ по 20, 30 и 40 яблокъ.

Формула (1) дастъ для x цѣлое число, если y взято цѣлымъ числомъ и если поэтому величина $\frac{(a-b)\,t}{z-t}$ будетъ цѣлое число. Поэтому достаточно найти рѣшенія, въ которыхъ z и t суть числа первыя между собою; потому что, если задача разрѣшается при mz' и mt', она разрѣшится и при z' и t', и обратно. Въ этомъ случаѣ, $z-t$ и t—числа первыя между собою; и

тогда достаточно, чтобы $z-t$ дѣлило $a-b$ безъ остатка, чтобы формула $\frac{(a-b)t}{z-t}$ дала цѣлое число. Такъ что если $a-b$ есть число первое, простое, нужно, чтобы $z-t=1$, или $z=t+1$.

Установивъ это, вернемся къ основной формулѣ $x=y-\frac{(a-b)t}{z-t}$.

Здѣсь y не можетъ быть больше $b-1$, и, предполагая

$$\frac{(a-b)t}{z-t}<b-1,$$

мы видимъ, что должны взять

$$z>\frac{a-1}{b-1}t.$$

Положимъ, напримѣръ, что даны числа: 31, 32, 37, которыхъ разности: 32—31, 37—31, суть числа первыя между собою. Мы должны взять $z>\frac{36}{30}t$ или $\frac{6}{5}t$, и посмотрѣть какія рѣшенія при $z-t=1$. Найдемъ:

При $t=1$, $z=2$,
При $t=2$, $z=3$,
При $t=3$, $z=4$,
При $t=4$, $z=5$,

и другихъ подобныхъ рѣшеній нѣтъ.

Что касается трехъ чиселъ, взятыхъ Башэ: 20, 30, и 40, то для нихъ надо взять $z>\frac{39}{19}t$.

Разности: 30—20, или 10, и 40—20, или 20 имѣютъ общими множителями 2, 5 и 10; поэтому можно принять:

$t=1$ и $z=3$
$t=1$ и $z=6$

$t=1$ и $z=11$
$t=2$ и $z=7$
$t=3$ и $z=8$
$t=3$ и $z=13$ и т. д.,

ограничиваясь рѣшеніями, гдѣ z и t суть числа первыя между собою. Затѣмъ задача кончается при помощи формулы (1).

Примѣчаніе. Если $z-t=d$, нужно, чтобы было

$$t+d>\frac{a-1}{b-1}t,$$

изъ этого неравенства слѣдуетъ, что надо взять

$$t<\frac{(b-1)d}{a-b}.$$

Такъ въ предъидущемъ примѣрѣ, необходимо, чтобы t было $<\frac{19.10}{20}$, или $t<9\frac{1}{2}$; а слѣдовательно 9 есть наибольшая величина для t, которую мы найдемъ, продолжая отыскивать дальнѣйшія рѣшенія.

ЗАДАЧА XXV.

Тремя лицами взяты три разныя вещи; узнать, кто взялъ какую вещь.

Изъ трехъ лицъ одно нужно назвать первымъ, другое вторымъ, и третье третьимъ лицомъ; точно также и вещи назвать первою, второю и третьею. Затѣмъ, взявъ 24 марки, дать изъ нихъ одну первому лицу, двѣ второму и три третьему, и положивъ остальныя 18 на столъ, предложить каждому лицу выбрать по желанію одну изъ трехъ вещей. Послѣ этого пусть то лицо, которое взяло первую вещь, возьметъ изъ оставшихся марокъ столько, сколько было ему дано сначала; лицо, взявшее вторую вещь, пусть возьметъ изъ оставшихся марокъ вдвое болѣе, чѣмъ ему было дано сначала, и наконецъ лицо, взявшее третью вещь, должно взять вчетверо болѣе марокъ, чѣмъ ему было дано сначала. Тогда на столѣ останется нѣкоторое число марокъ, по которому можно узнать какое лицо взяло какую вещь.

Посмотримъ сколько можетъ оставаться марокъ въ различныхъ случаяхъ, которые могутъ представиться. Обозначимъ три предмета буквами a, e, i. Размѣщая

ихъ въ порядкѣ, въ какомъ они могутъ быть взяты первымъ, вторымъ и третьимъ лицомъ, мы найдемъ слѣдующіе шесть случаевъ:

$a, e, i;$ $e, a, i;$ $a, i, e;$
$e, i, a;$ $i, a, e;$ $i, e, a;$

Въ первомъ случаѣ, три лица взяли: 1, 4 и 12 марокъ, что составляетъ 17, и слѣдовательно осталась 1 марка.

Во второмъ случаѣ, три лица взяли: 2, 2 и 12 марокъ, т. е. всего 16, слѣдовательно въ остаткѣ 2 марки.

Въ третьемъ случаѣ, три лица взяли: 1, 8 и 6 марокъ, т. е. всего 15, слѣдовательно остается на столѣ 3 марки.

Въ четвертомъ случаѣ три лица взяли: 2, 8 и 3 марки, т. е. всего 13 марокъ и на столѣ остается 5 марокъ.

Въ пятомъ случаѣ три лица берутъ: 4, 2 и 6 марокъ, т. е. 12, и на столѣ остается 6 марокъ.

Въ шестомъ случаѣ три лица берутъ: 4, 4 и 3 марки, т. е. 11, и на столѣ остается 7 марокъ.

Эти остатки для удобства представляемъ въ слѣдующей таблицѣ:

Остатки.	1ое лицо.	2ое лицо.	3ье лицо.
1	a	e	i
2	e	a	i
3	a	i	e
5	e	i	a
6	i	a	e
7	i	e	a

Легко замѣтить, что при остаткѣ 1, три вещи расположены въ первоначальномъ порядкѣ, *a*, *e*, *i*; при остаткѣ 7, три предмета находятся въ противоположномъ порядкѣ: *i*, *e*, *a*; при остаткѣ 2 достаточно переставить двѣ первыя вещи 1-го остатка и при остаткѣ 3 переставить двѣ послѣднія вещи того же остатка 1; при остаткѣ 5 достаточно переставить двѣ первыя вещи остатка 7, а при остаткѣ 6 двѣ послѣднія.

Вотъ мнемоническое правило, данное Башэ; для этихъ шести возможныхъ случаевъ должно запомнить слѣдующія шесть словъ:

Par fer, César, jadis, devint, si grand, prince.

Если въ остаткѣ будетъ 1 марка, нужно имѣть въ виду первое слово (par fer).

Если въ остаткѣ будутъ 2 марки, нужно взять второе слово (César).

Если въ остаткѣ будетъ 3 марки, нужно взять третье слово (jadis).

Если въ остаткѣ будетъ 5 марокъ, нужно взять четвертое слово (devint) и т. д.

Для того, чтобы воспользоваться этимъ правиломъ, должно замѣтить, что въ каждомъ изъ шести словъ два слога, изъ которыхъ первый обозначаетъ первое лицо, а второй второе; точно также не должно забывать, что гласная *a* обозначаетъ первую вещь, *e* вторую и *i* третью. Поэтому, чтобы узнать какая вещь у кого изъ трехъ лицъ находится, надо посмотрѣть какія гласныя входятъ въ каждый слогъ. Напримѣръ, положимъ, что осталось 3 марки и что, слѣдовательно, нужно взять третье слово *jadis;* тогда, такъ какъ первая гласная *a* находится въ первомъ слогѣ, должно сказать, что первое лицо взяло первую вещь; и такъ

какъ во второмъ слогѣ находится третья гласная *i*, должно сказать, что третья вещь находится у втораго лица. Зная вещи, находящіяся у двухъ лицъ, не трудно узнать, какая вещь находится у третьяго лица.

ЗАМѢЧАНІЕ.

Нѣкоторые дѣлаютъ эту задачу нѣсколько иначе: первому лицу даютъ 1 марку, второму 2, и третьему 4, такъ что остается всего 17 марокъ. Затѣмъ предлагаютъ: тому, у кого находится первая вещь, взять столько марокъ, сколько у него уже есть, тому у кого вторая вещь взять вдвое болѣе, чѣмъ ему было дано, и наконецъ, тому у кого третья вещь, взять втрое болѣе, чѣмъ ему было дано. Поступая такимъ образомъ, мы получимъ, въ указанныхъ выше шести случаяхъ, остатки: 0, 1, 2, 5, 4, 6.

Можно рѣшить эту задачу также при помощи словъ:

Avec éclat l'Aï brillant devint libre,

прилагая ихъ послѣдовательно, къ остаткамъ: 0, 1, 2, 4, 5, 6. Но лучше, какъ въ предъидущемъ случаѣ, оставлять на столѣ 18 марокъ, чтобы получались остатки: 1, 2, 3, 5, 7.

Башэ рѣшаетъ эту задачу для четырехъ лицъ и четырехъ вещей, чего, какъ говоритъ онъ, никто не дѣлалъ до него. Онъ обозначаетъ четыре предмета гласными *a*, *e*, *i*, *o;* четыре лица называетъ, какъ и мы выше дѣлали, одно первымъ, другое вторымъ и т. д., и даетъ одному 1 марку, другому 2, третьему 3 и четвертому 4 марки, и на столъ кладетъ 78 марокъ, такъ что для рѣшенія задачи онъ употребляетъ всего 88 марокъ. Затѣмъ лицо, у котораго первая вещь

беретъ со стола столько марокъ, сколько у него уже есть; лицо, у котораго вторая вещь, беретъ вчетверо болѣе марокъ, чѣмъ сколько у него было сначала, и тотъ у кого третья вещь беретъ въ шестнадцать разъ болѣе, чѣмъ сколько у него было марокъ сначала. Что касается четвертаго лица, то его не должно брать въ разсчетъ, потому что, когда извѣстны какіе предметы у трехъ лицъ, извѣстно также какой и у четвертаго лица. Три вещи могутъ быть взяты 1-мъ, 2-мъ, и 3 лицемъ шестью различными способами; точно также 1-е, 2-е и 4-е лица могутъ взять три вещи шестью способами; столько же случаевъ можетъ быть, когда 3 вещи взяты 1-мъ, 3-мъ и 4-мъ лицами, и когда онѣ взяты 2-мъ, 3-мъ и 4-мъ лицами, такъ что мы получимъ 24 различныхъ сочетанія. Дѣлая вычисленія для различныхъ случаевъ, мы найдемъ 24 разныхъ остатка, и задача можетъ быть рѣшена на основаніи этихъ остатковъ.

Вотъ таблица рѣшеній. (См. 127 стр.).

Можно также рѣшить задачу, расположивъ тѣ же числа двумя концентрическими кругами, изъ которыхъ внутренній заключаетъ въ себѣ повторяющіяся числа 1, 2, 3, 4, которыя обозначаютъ четыре предмета. Зная остатокъ марокъ, нужно отыскать этотъ остатокъ на внѣшнемъ кругѣ и затѣмъ взять на внутреннемъ кругѣ число, которое соотвѣтствуетъ данному остатку, и два числа, лежащія къ низу отъ перваго; эти три числа указываютъ предметы, взятые первыми тремя лицами. Напримѣръ, въ остаткѣ марокъ 43; возьмемъ это число на внѣшнемъ кругѣ, и мы найдемъ на внутреннемъ кругѣ противъ этого остатка 3, а слѣдующія за этимъ числомъ два числа книзу будутъ: 4 и 1. Эти три числа, 3, 4, 1, расположенныя такимъ образомъ, указываютъ, что первое лицо взяло

Остатки.	1е лицо.	2е лицо.	3е лицо.	4е лицо.
0	*o*	*a*	*e*	*i*
1	*a*	*o*	*e*	*i*
3	*o*	*e*	*a*	*i*
5	*a*	*e*	*o*	*i*
7	*e*	*o*	*a*	*i*
8	*e*	*a*	*o*	*i*
12	*o*	*a*	*i*	*e*
13	*a*	*o*	*i*	*e*
18	*o*	*e*	*i*	*a*
21	*a*	*e*	*i*	*o*
22	*e*	*o*	*i*	*a*
24	*e*	*a*	*i*	*o*
27	*o*	*i*	*a*	*e*
29	*a*	*i*	*o*	*e*
30	*o*	*i*	*e*	*a*
33	*a*	*i*	*e*	*o*
38	*e*	*i*	*o*	*a*
39	*e*	*i*	*a*	*o*
43	*i*	*o*	*a*	*e*
44	*i*	*a*	*o*	*e*
46	*i*	*o*	*e*	*a*
50	*i*	*e*	*o*	*a*
51	*i*	*e*	*a*	*o*

третью вещь, второе взяло четвертую, третье первую, и слѣдовательно четвертое лицо взяло вторую вещь.

Если мы возьмемъ на лѣвомъ полукругѣ остатокъ 8, найдемъ указаннымъ способомъ числа 2, 1, 4; это

50
7 3
2
12
4
29
1
46
3
3 4
2
8
1
13
4
30
3
51
2
24 1
33

21
1 38
2
43
3
0
4
5
1
2 22
4
27
3
44
1
1
4
18
2
39
3
48

указываетъ, что первое лицо взяло вторую вещь, второе первую, третье четвертую, и слѣдов. четвертое лицо взяло третью вещь. При остаткѣ 39 получимъ числа 2, 3, 1, а при остаткѣ 24 получимъ числа 2, 1, 3.

ПРИБАВЛЕНІЕ.

Рѣшеніе, данное Башэ, выяснено нами въ XII-й нашей задачѣ. Задача съ тремя лицами и тремя вещами можетъ быть точно такъ же рѣшена, если на столѣ оставить 12 марокъ, и если предложить лицу, взявшему

первую вещь, взять столько марокъ, сколько у него уже есть, а лицу, взявшему вторую вещь, взять втрое болѣе, чѣмъ сколько у него есть. Въ этомъ случаѣ получимъ слѣдующую таблицу:

остатки.	1е лицо.	2е лицо.	3е лицо.
1		*a*	*e*
2	*a*		*e*
3		*e*	*a*
5	*a*	*e*	
6	*e*		*a*
7	*e*	*a*	

Для удобства рѣшенія этой задачи, нужно запомнить слѣдующія слова:

Il a jadis brillé dans ce petit État,

и примѣнять послѣдовательно по два слога къ остаткамъ: 1, 2, 3, 5, 6, 7. Но задача XII имѣетъ въ виду болѣе общій случай подобной задачи, и даетъ намъ возможность рѣшать ее въ томъ случаѣ, когда число вещей менѣе числа лицъ участвующихъ. Напримѣръ: три предмета взяты тремя лицами изъ пяти. Расположивъ участвующихъ лицъ по порядку, даютъ имъ послѣдовательно по 1, 2, 3, 4 и 5 марокъ; затѣмъ лицо, взявшее первую вещь, беретъ со стола столько марокъ, сколько у него уже есть; лицо, взявшее вторую вещь, должно взять въ пять разъ болѣе марокъ, чѣмъ сколько у него было; лицо, у

котораго третья вещь—въ двадцать пять разъ болѣе, чѣмъ у него было.

И такъ какъ для этого можетъ потребоваться $5\times25+4\times5+3\times1$ (задача XI) или 148 марокъ, то нужно на столъ положить 149; по различнымъ остаткамъ можно узнать, кѣмъ изъ пяти лицъ были взяты данные три предмета. При этомъ составляется указаннымъ выше способомъ таблица, которая будетъ заключать въ себѣ $5\times4\times3$ или 60 различныхъ случаевъ. Но дѣлать задачу съ такимъ большимъ количествомъ марокъ очень неудобно; поэтому нужно марки замѣнить вычисленіями на бумагѣ надъ числомъ 149, которыя должны быть произведены лицами, взявшими три вещи.

Еще прежде Башэ, Діего Паломино, о которомъ мы упоминали выше, рѣшалъ эту задачу для четырехъ лицъ и четырехъ вещей; его способъ рѣшенія этой задачи изложенъ въ томъ же сочиненіи, въ которомъ онъ говоритъ о магическихъ квадратахъ.

Нѣкоторыя другія

МАТЕМАТИЧЕСКІЯ ИГРЫ.

I.

Спрашивается число, которое отъ дѣленія на 2 дастъ въ остаткѣ 1, отъ дѣленія на 3 дастъ въ остаткѣ 1, и точно также отъ дѣленія на 4, на 5 и на 6, всегда въ остаткѣ дастъ 1, но на 7 раздѣлится безъ остатка.

Задача эта обыкновенно предлагается такимъ образомъ: бѣдная женщина несетъ на рынокъ корзину съ яйцами, на дорогѣ прохожій нечаянно вышибаетъ у нея корзину; яйца падаютъ и разбиваются. Желая вознаградить бѣдную женщину за убытокъ, имъ причиненный, прохожій спрашиваетъ, сколько у нея было всего яицъ; она отвѣчаетъ, что числа ихъ она навѣрное не знаетъ, но помнитъ, что когда перекладывала ихъ по три, по четыре, по пяти и по шести, всегда оставалось въ остаткѣ одно яйцо, но когда пересчитывала ихъ по семи, остатка не получалось. Спрашивается, какъ отсюда узнать, сколько было всего яицъ въ корзинѣ?

Общее наименьшее кратное число 2, 3, 4, 5, 6, будетъ 60; поэтому надо найти кратное отъ 7, которое превышало бы на 1 какое нибудь число кратное отъ 60. Чтобы найти такое число нужно послѣдовательно сравнивать кратныя отъ 60 и отъ 7; 60 : 7 даетъ въ остаткѣ 4; поэтому 2.60 дастъ въ остаткѣ 8, т. е., по выключеніи 7, 1; мы имѣемъ слѣдовательно:

$$2.60 = 7 + 1;$$

откуда $$7.60 - 2.60 = 1 + \dot{7},$$

или $$5.60 + 1 = \dot{7}.$$

(См. въ концѣ книги пр. II).

Такимъ образомъ наименьшее число, разрѣшающее эту задачу, есть 301.

Такимъ же способомъ можно рѣшить задачу и при другихъ остаткахъ чѣмъ 1; напримѣръ, еслибы требовалось найти число, кратное отъ 19, которое отъ дѣленія порознь на 8, 12 и 15, давало бы постоянно одинъ и тотъ же остатокъ 7.

II.

Найти число, которое отъ дѣленія на 2 даетъ въ остаткѣ 1, отъ дѣленія на 3 даетъ остатокъ 2, отъ дѣленія на 4 даетъ въ остаткѣ 3, отъ дѣленія на 5 даетъ въ остаткѣ 4, отъ дѣленія на 6 даетъ въ остаткѣ 5, но на 7 раздѣлится безъ остатка.

Эта задача входитъ въ предъидущую, потому что кратное отъ 6 + 5 равняется кратному отъ 6 безъ 1, и т. д. для другихъ чиселъ; а слѣдовательно должно составить уравнение

$$\dot{7} = \dot{60} - 1,$$

или $$\dot{60} = \dot{7} + 1.$$

Первое число, удовлетворяющее требованію, будетъ 119 (см. прим. II въ концѣ книги). Задача можетъ быть рѣшена такимъ же образомъ и тогда, когда разница между каждымъ изъ дѣлителей и остаткомъ была бы не 1, а какое нибудь другое число.

III.

Два добрые товарища хотятъ раздѣлить между собою поравну 8 пинтъ вина, помѣщеннаго въ кувшинѣ, содержащемъ ровно 8 пинтъ; но для раздѣла у нихъ подъ рукою только два кувшина, изъ которыхъ одинъ въ 5 пинтъ, а другой въ 3. Спрашивается какъ они могутъ поравну раздѣлить вино, не употребляя другихъ сосудовъ, кромѣ этихъ трехъ.

Эту задачу, равно какъ и подобныя ей, можно рѣшать двумя способами.

1-й способъ. Изъ кувшина въ 8 пинтъ перелить 5 въ кувшинъ, вмѣщающій 5 пинтъ, и отсюда налить полный кувшинъ въ три пинты; тогда въ середнемъ останется 2 пинты. Потомъ надо вылить вино изъ кувшина въ 3 пинты въ большой кувшинъ, а въ него перелить 2 пинты изъ средняго. Затѣмъ снова наполнить кувшинъ въ 5 пинтъ и изъ него долить одну пинту въ меньшій кувшинъ; тогда въ кувшинѣ въ 5 пинтъ остается 4, т. е. ровно столько, сколько будетъ въ остальныхъ двухъ вмѣстѣ.

2-й способъ. Изъ большаго кувшина 3 пинты налить въ самый маленькій и перелить ихъ въ средній кувшинъ

въ 5 пинтъ, потомъ снова изъ большаго кувшина наполнить кувшинъ въ 3 пинты, и изъ него долить двѣ пинты въ средній кувшинъ; тогда въ меньшемъ останется одна пинта. Затѣмъ 5 пинтъ изъ средняго кувшина выливаютъ въ большой, а въ него выливаютъ 1 пинту изъ меньшаго; и наконецъ изъ большаго кувшина снова наполняютъ меньшій въ 3 пинты, такъ что въ первомъ остаются 4, ровно столько, сколько въ двухъ другихъ кувшинахъ.

Эти 2 рѣшенія можно представить въ слѣдующихъ таблицахъ:

1-й способъ.

кувшины.

8	5	3
8	0	0
3	5	0
3	2	3
6	2	0
6	0	2
1	5	2
1	4	3
4	4	0

2-й способъ.

кувшины.

8	5	3
8	0	0
5	0	3
5	3	0
2	3	3
2	5	1
7	0	1
7	1	0
4	1	3
4	4	0

Хотя съ перваго взгляда кажется, что задача эта не допускаетъ какого нибудь общаго правила, на которомъ основывалось бы ея рѣшеніе, и что она дѣлается, какъ-то ощупью, тѣмъ не менѣе посредствомъ извѣстнаго рода разсужденій можно достигнуть ея рѣшенія, или же убѣдиться въ ея невозможности.

Въ этомъ случаѣ должно разсуждать такимъ образомъ:

Чтобы раздѣлить поравну 8 пинтъ, нужно, чтобы получилось 4 съ одной стороны и 4 съ другой. Очевидно, что по четыре пинты можно вмѣстить только въ кувшины въ 8 и 5 пинтъ; и мы должны поэтому добиться какъ того, такъ и другаго. Такимъ образомъ мы можемъ идти двумя путями. Чтобы получить 4 пинты въ кувшинѣ въ 5 пинтъ, нужно, чтобы, когда онъ будетъ наполненъ, изъ него можно было отлить одну пинту. Это можно сдѣлать, переливъ эту пинту въ одинъ изъ остальныхъ кувшиновъ, въ которомъ недостаетъ ровно одной пинты. Очевидно это не можетъ быть кувшинъ въ 8 пинтъ (еслибы при полномъ кувшинѣ въ 5 пинтъ, въ большомъ кувшинѣ недоставало только одной, то мы имѣли бы слѣдовательно всего 12 пинтъ вина, что противно задачѣ), а потому недоставать одной пинты должно въ кувшинѣ въ 3 пинты, т. е. въ немъ должно быть только 2 пинты.

Тутъ можно предположить два случая: или возможность изъ полнаго кувшина въ 3 пинты отлить одну, или въ пустой кувшинъ въ 3пинты перелить 2 изъ другаго кувшина. Первый случай невозможенъ, потому что тогда нужно, чтобы при полномъ кувшинѣ въ 3 пинты, въ одномъ изъ двухъ другихъ нехватало бы одной пинты; этого не можетъ быть съ кувшиномъ въ 5 (потому что тогда въ этомъ кувшинѣ было бы 4 пинты, т. е. то чего мы добиваемся); точно также этого не можетъ быть и съ кувшиномъ въ 8 пинтъ (потому-что тогда въ немъ должно быть 7 пинтъ, что вмѣстѣ съ 3 другими составило бы 10 пинтъ, что противно задачѣ).

Поэтому нужно прибѣгнуть ко второму случаю, т. е. постараться получить 2 пинты въ кувшинѣ въ 3 пинты,

Эти 2 пинты не могутъ быть перелиты изъ кувшина въ 8 пинтъ (если, при пустомъ кувшинѣ въ 3 пинты, въ большомъ кувшинѣ было бы только 2, то, хотя бы средній кувшинъ былъ полонъ, всетаки все число пинтъ равнялось бы 7-ми, что противно задачѣ); поэтому 2 пинты должны быть перелиты изъ средняго кувшина. Но для того, чтобы получить 2 пинта въ кувшинѣ въ 5 пинтъ, надо отлить изъ него три, что сдѣлать очень легко при помощи кувшина въ 3 пинты.

Теперь, если мы внимательно всмотримся во все, что было нами сказано, то увидимъ что наши разсужденія представляютъ въ обратномъ порядкѣ тотъ 1-й способъ, которымъ мы выше рѣшали эту задачу.

Слѣдуя другимъ путемъ, мы будемъ разсуждать такимъ образомъ. Для того, чтобы получить 4 пинты въ большомъ кувшинѣ въ 8 пинтъ, нужно какимъ нибудь образомъ вылить изъ него 4 пинты. Этого мы могли бы достигнуть тремя способами. Во-первыхъ, отливъ сразу 4 пинты, но это невозможно, такъ какъ у насъ нѣтъ сосуда, который вмѣщалъ бы ровно 4 пинты. Во-вторыхъ, отливая изъ большаго кувшина два раза по двѣ пинты; но хотя мы выше показали возможность отдѣлить 2 пинты, тѣмъ не менѣе и этотъ способъ невозможенъ, такъ какъ некуда будетъ отлить другія двѣ пинты. Наконецъ можно сначало отдѣлить одну пинту, а потомъ еще 3. Это и есть дѣйствительный способъ рѣшенія задачи, потому что, если мы можемъ отдѣлить въ сосудъ въ 5 пинтъ 1 пинту, то, наполнивъ потомъ кувшинъ въ 3 пинты, въ большомъ кувшинѣ у насъ останется ровно 4 пинты.

Для того, чтобы получить 1 пинту въ среднемъ кувшинѣ, нужно имѣть возможность или вылить изъ него 4, когда онъ наполненъ, или влить въ него эту одну

пинту изъ другаго сосуда. Первое невозможно, потому что невозможно отлить 4 пинты изъ средняго кувшина ни въ меньшій, такъ какъ онъ не настолько вмѣстителенъ, ни въ большій, такъ какъ для этого было бы необходимо, чтобы въ немъ уже находилось 4 пинты, и такимъ образомъ все число пинтъ обратилось бы въ 9, что противно задачѣ. Поэтому мы обратимся ко второму способу и постараемся получить въ среднемъ сосудѣ одну пинту, переливъ ее изъ другаго сосуда. Этого нельзя сдѣлать изъ большаго сосуда (потому что если въ большомъ сосудѣ была бы одна пинта, тогда какъ средній былъ бы пустъ, то, хотя меньшій былъ бы полонъ, всетаки мы имѣли бы всего только 4 пинты), а слѣдовательно одну пинту должно получить въ меньшемъ сосудѣ. Для того, чтобы этого достигнуть, надо имѣть возможность отлить 2 пинты изъ меньшаго сосуда, когда онъ наполненъ, а для этого необходимо, чтобы въ одномъ изъ двухъ другихъ кувшиновъ недоставало ровно 2 пинтъ. Этого не можетъ быть съ большимъ кувшиномъ, иначе все число пинтъ вина равнялось бы 9, а потому недоставать 2 пинтъ должно въ среднемъ кувшинѣ въ 5 пинтъ. Послѣдняго достигнуть весьма легко, переливъ изъ меньшаго кувшина въ средній сначала три пинты, а потомъ, если меньшій снова наполнить и изъ него долить средній, то въ первомъ очевидно останется одна пинта. Это разсужденіе въ обратномъ порядкѣ представляетъ именно тотъ 2-й способъ, которымъ мы выше рѣшали нашу задачу.

Вотъ нѣсколько примѣровъ подобной задачи съ другими числами.

Первый примѣръ съ кувшинами въ 16, 9 и 7 пинтъ.

1-е рѣшеніе.

16,	9,	7
16,	0,	0
7,	9,	0
7,	2,	7
14,	2,	0
14,	0,	2
5,	9,	2
5,	4,	7
12,	4,	0
12,	0,	4
3,	9,	4
3,	6,	7
10,	6,	0
10,	0,	6
1,	9,	6
1,	8,	7
8,	8,	0

2-е рѣшеніе.

16,	9,	7
16,	0,	0
9,	0,	7
9,	7,	0
2,	7,	7
2,	9,	5
11,	0,	5
11,	5,	0
4,	5,	7
4,	9,	3
13,	0,	3
13,	3,	0
6,	3,	7
6,	9,	1
15;	0,	1
15,	1,	0
8,	1,	7
8,	8,	0

Второй примѣръ съ кувшинами въ 16, 11 и 6 пинтъ.

1-е рѣшеніе.

16,	11,	6
16,	0,	0
5,	11,	0
5,	5,	6
11,	5,	0
11,	0,	5
0,	11,	5
0,	10,	6
6,	10,	0
6,	4,	6
12,	4,	0
12,	0,	4
1,	11,	4
1.	9,	6
7,	9,	0
7,	3,	6
13,	3,	0
13,	0,	3
2,	11,	3
2,	8,	6
8,	8,	0

2-е рѣшеніе.

16,	11,	6
16,	0,	0
10,	0,	6
10,	6,	0
4,	6,	6
4,	11,	1
15,	0,	1
15,	1,	0
9,	1,	6
9,	7,	0
3,	7,	6
3,	11,	2
14,	0,	2
14,	2,	0
8,	2,	6
8,	8,	0

Третій примѣръ съ кувшинами въ 42, 27 и 12 пинтъ.

1-е рѣшеніе.

42,	27,	12
42,	0,	0
15,	27,	0
15,	15,	12
27,	15,	0
27,	3,	12
39,	3,	0
30,	0,	3
12,	27,	3
12,	18,	12
24,	18,	0
24,	6,	12
36,	6,	0
36,	0,	6
9,	27,	6
9,	21,	12
21,	21,	0

2-е рѣшеніе.

42,	27,	12
42.	0,	0
30,	0,	12
30,	12.	0
18,	12,	12
18,	24,	0
6,	24,	12
6,	27,	9
33,	0,	9
33,	9,	0
21,	9,	21
21,	21,	0

Чтобы объяснить рѣшеніе своей задачи, Башэ употребилъ очень остроумное разсужденіе, которое слѣдовало бы прилагать къ каждой задачѣ подобнаго рода, чтобы убѣдиться впередъ въ возможности ея рѣшенія.

Мы взялись за разсмотрѣніе этого важнаго вопроса, и намъ удалось его разрѣшить для обоихъ способовъ рѣшенія нашей задачи. Остановимся сначала на первомъ способѣ и обозначимъ кувшины черезъ A, B, C.

Наполняютъ кувшинъ B изъ A, потомъ наполняютъ C изъ B и всякій разъ полный C выливаютъ въ A. При этой переливкѣ въ B всякій разъ остается извѣст-

стное количество жидкости, которую можно выразить через $B - \dot{C}'$. Если это количество не равно $\frac{A}{2}$, то его выливаютъ въ C, если оно менѣе C.

Снова B наполняютъ изъ A, затѣмъ изъ B доливаютъ C и выливаютъ въ A; снова наполняютъ C изъ B и выливаютъ въ A; количество жидкости, всякій разъ остающейся въ B можетъ быть выражено черезъ

$$2B - \dot{C}'.$$

Легко видѣть, что, продолжая эту операцію, количество жидкости въ B, въ данный моментъ можетъ быть выражено черезъ

$$\dot{B}' - \dot{C}';$$

слѣдовательно, чтобы оно было равно $\frac{A}{2}$, необходимо, чтобы можно было получить уравненіе $\dot{B}' = \dot{C}' + \frac{A}{2}$. Этому условію можно всегда удовлетворить, если B и C суть числа первыя между собою, или если $\frac{A}{2}$ содержитъ въ себѣ общихъ множителей съ B и C.

Этого условія достаточно, *если въ A всегда будетъ довольно жидкости, чтобы наполнить* B; потому что уравненіе

$$mB = nC + \frac{A}{2}$$

показываетъ, что, если мы m разъ наполнимъ B изъ A и n разъ выльемъ C въ A, въ концѣ концовъ въ B останется количество $\frac{A}{2}$. Если емкость A не менѣе суммы емкостей другихъ сосудовъ, въ A всегда будетъ довольно жидкости, чтобы наполнить B. Но не совсѣмъ будетъ такъ, когда $A < B + C$, что мы имѣемъ, например, съ кувшинами, емкости которыхъ 20, 13 и 9, или 16, 12 и 7. Въ этомъ случаѣ задача можетъ быть

возможна, или нѣтъ, но судить объ этомъ a priori нельзя.

Посмотримъ теперь второй способъ рѣшенія задачи. C наполняютъ изъ A и переливаютъ въ B; снова наполняютъ C и выливаютъ въ B, и продолжаютъ поступать такъ до тѣхъ поръ, пока B наполнится или въ немъ будетъ количество жидкости, равное $\frac{A}{2}$, что можетъ случиться только тогда, когда C есть подмножимое число отъ $\frac{A}{2}$.

Когда B наполнено, его выливаютъ въ A, и въ C остается количество жидкости, которое можетъ быть выражено черезъ C — B. Это количество вливается въ B.

Снова наполняютъ C изъ A, и вливаютъ C въ B, пока онъ не наполнится. Пока B не наполнилось, оно содержитъ количество жидкости, которое можетъ быть выражено черезъ $\dot{C}' - B$, потому что здѣсь только прибавлено кратное C къ предъидущему количеству. Когда B наполнится, его переливаютъ въ A, а въ C останется нѣкоторое количество жидкости, которое можно выразить черезъ $\dot{C}' - 2B$; это количество опять вливается въ B и дополняется кратнымъ отъ C.

Отсюда видно, что, продолжая эту процедуру, количество жидкости въ сосудѣ B въ данный моментъ, пока онъ не наполненъ, можно выразить черезъ

$$\dot{C}' - \dot{B}';$$

поэтому, чтобы это количество было равно $\frac{A}{2}$, нужно, чтобы получилось уравненіе

$$\dot{C}' = \dot{B}' + \frac{A}{2}.$$

Этому условію легко удовлетворить, если B и C числа первыя между собою, или, если $\frac{A}{2}$ содержитъ общихъ множителей съ B и C. Этого условія достаточно, *если въ A всегда будетъ довольно жидкости, чтобы наполнить C*; потому что, если

$$nC = mB + \frac{A}{2},$$

то

$$A - nC + mB = \frac{A}{2}$$

и это уравненіе показываетъ, что, если мы наполнимъ C изъ A n разъ и m разъ вольемъ B въ A, послѣдній будетъ содержать количество $\frac{A}{2}$.

Исключительность случая, когда $A < B + C$, существуетъ и здѣсь, какъ въ предъидущемъ случаѣ.

IV.

Ночью у переѣзда черезъ рѣку встрѣчаются три ревнивыхъ мужа съ своими женами; для переѣзда они находятъ только небольшую лодочку безъ лодочника, и которая притомъ такъ мала, что можетъ вмѣстить за разъ только двухъ человѣкъ. Спрашивается, какъ должны поступить эти 6 лицъ, чтобы переѣзжая по два никогда не пришлось бы одной женѣ оставаться въ отсутствіи мужа въ обществѣ одного или двухъ изъ постороннихъ мужчинъ.

Для этого необходимо шесть слѣдующихъ переѣздовъ.

Сначала переѣзжаютъ двѣ женщины, затѣмъ одна изъ нихъ возвращается и перевозитъ третью; потомъ одна изъ трехъ переѣзжаетъ назадъ съ лодкой и остается съ мужемъ на берегу, а два другіе переѣзжаютъ къ своимъ женамъ. Послѣ того одинъ изъ нихъ ѣдетъ съ своей женою обратно, оставляетъ ея на берегу, и перевозитъ третьяго мужа. Наконецъ та изъ женъ, которая находится на другомъ берегу съ тремя мужьями, въ два раза перевозитъ оставшихся на этомъ берегу.

При существованіи условія, чтобы ни одна изъ женъ не оставалась въ обществѣ мужчинъ безъ своего мужа, мы можемъ рѣшеніе этой задачи объяснить слѣдующимъ разсужденіемъ. Очевидно, что для переѣзда по два человѣка за разъ, необходимо, чтобы переѣзжали или два мужа вмѣстѣ, или двѣ жены, или мужъ съ женою. При первомъ переѣздѣ не могутъ переѣхать двое мужчинъ (потому что тогда ихъ жены остались бы въ обществѣ третьяго мужа, что противорѣчитъ условію задачи), поэтому необходимо, чтобы переѣзжали сначала или двѣ женщины или одинъ изъ мужей съ женой. Но эти два способа сводятся къ одному, потому-что какъ въ первомъ случаѣ останется на противоположномъ берегу одна женщина (другая отвозитъ лодку обратно), точно также и во второмъ случаѣ на противоположномъ берегу должна остаться жена, а мужъ отвозитъ обратно лодку (въ противномъ случаѣ жена очутилась бы въ обществѣ мужчинъ въ отсутствіи своего мужа). При второмъ переѣздѣ не могутъ переѣхать двое мужчинъ (потому что одинъ изъ нихъ долженъ такимъ образомъ оставить жену въ обществѣ другаго мужчины); не можетъ также переѣхать мужъ съ женой (потому что, переѣхавъ, онъ очутился бы въ обществѣ двухъ женщинъ); поэтому нужно, чтобы переѣхали двѣ женщины. Такимъ образомъ переѣзжаютъ всѣ три женщины и одна изъ нихъ отвозитъ лодку обратно. При третьемъ переѣздѣ, женщина остается только одна, а потому не можетъ быть и рѣчи о переѣздѣ двухъ женщинъ за разъ; не могутъ также переѣхать мужъ съ женой (иначе на противоположномъ берегу среди трехъ женщинъ очутится одинъ мужчина), поэтому должны переѣхать двое мужчинъ; и тогда на этомъ берегу останется мужъ съ женою. Теперь, спрашивается, кто долженъ переправить лодку обратно за оставшимися? Это не можетъ быть сдѣлано однимъ изъ мужчинъ (потому что жена его тогда осталась бы съ другимъ); не можетъ быть это сдѣлано точно также и одною изъ женщинъ, поэтому остается переѣхать назадъ одному изъ мужей со своею женой. При четвертомъ переѣздѣ не могутъ переѣзжать мужъ съ женою (потому что это значило бы вернуться къ предыдущему положенію), не могутъ переѣхать и двѣ женщины, а потому должны переѣхать двое мужчинъ, оставивъ на берегу своихъ женъ. Назадъ лодку должна перевести женщина (иначе условіе задачи будетъ нарушено), и затѣмъ въ два переѣзда перевозятся остальныя двѣ женщины. Такимъ образомъ, не нарушая условія задачи, всѣ шестеро переѣзжаютъ черезъ рѣку.

Рѣшить подобную задачу при четырехъ мужьяхъ съ ихъ женами.

Тарталія (Tartaglia) предполагалъ возможнымъ рѣшить эту задачу, перевозя эти 8 лицъ по два, но онъ ошибался, какъ это было выяснено Башэ, который признаетъ невозможность подобнаго рѣшенія, не указывая однако ея причины. Убѣдиться въ этомъ можно слѣдующимъ образомъ.

Прежде всего должно замѣтить, что съ каждымъ переѣздомъ число переѣхавшихъ увеличивается только на единицу. Предположимъ затѣмъ, что перевезено 2, 3, 4 и наконецъ 5 человѣкъ, и посмотримъ могутъ ли пять человѣкъ быть перевезены съ сохраненіемъ условія задачи. Эти 5 человѣкъ будутъ или 4 женщины и одинъ мужчина, или 3 женщины и двое мужчинъ, или 2 женщины и трое мужчинъ, или, наконецъ, 1 женщина и четверо мужчинъ.

Ни первый, ни второй случай не могутъ имѣть мѣста, такъ какъ одна изъ женъ осталась бы въ мужскомъ обществѣ въ отсутствіи мужа; по той же причинѣ невозможенъ и третій случай.

Что же касается послѣдняго случая, то онъ необходимо предполагаетъ, что при послѣднемъ переѣздѣ переѣхало двое мужчинъ, или мужъ съ женою. Двое мужчинъ не могло переѣхать, потому что тогда должно предположить, что передъ тѣмъ на другой сторонѣ находилось двое мужчинъ и три женщины, что противорѣчитъ условію задачи. Не могли также при послѣднемъ переѣздѣ переѣхать мужъ съ женою, такъ какъ тогда передъ переѣздомъ должно предположить одного мужчину и 4 женщины, что точно также противорѣчитъ задачѣ.

Итакъ мы видимъ, что 5-ть человѣкъ нельзя перевезти, сохраняя предъидущее условіе, и перевозя по два за разъ.

Но другое дѣло, если они будутъ переѣзжать по три за разъ.

Обозначимъ мужей черезъ A, B, C, D, а ихъ женъ черезъ *a*, *b*, *c*, *d*.

	которыхъ нужно перевезти.	которые перевезены.
Сперва переѣзжаютъ 3 женщины.	A, B, C, D, *d*,	*a*, *b*, *c*,
Двѣ возвращаются и увозятъ четвертую.	A, B, C, D,	*a*, *b*, *c*, *d*,
Одна изъ женщинъ возвращается и остается на берегу съ мужемъ, а трое мужчинъ переѣзжаютъ.	A, *a*,	B, C, D, *b*, *c*, *d*,

	которыхъ нужно перевезти.	которые перевезены.
Одинъ изъ мужей возвращается съ женою и увозитъ послѣдняго мужа.	*a*,	A, B, C, D, *b*, *c*, *d*,
Наконецъ двѣ женщины возвращаются съ лодкой и перевозятъ послѣднюю.		A, B, C, D. *a*, *b*, *c*, *d*.

Легко обобщить эту задачу. Пусть n мужей будутъ: A, B,... L, M, и ихъ n женъ: *a*, *b*,... *l*, *m*; при каждомъ переѣздѣ переправляются $n-1$ человѣкъ.

Сначала переѣзжаютъ $n-1$ женщинъ,	A, B,... L, M, *m*,	*a*, *b*,... *l*,
$n-2$ женщины возвращаются за послѣдней,	A, B,... L, M,	*a*, *b*, *l*,... *m*,
Одна женщина возвращается, остается съ мужемъ на берегу, а остальные мужья переѣзжаютъ къ своимъ женамъ.	A, *a*,	B,... L, M, *b*,... *l*, *m*,
Здѣсь возможны два случая: n четное число или нечетное. Если n нечетное число, обозначимъ его черезъ $2n'+1$; тогда $n'-1$ мужей съ женами ѣдутъ обратно и перевозятъ послѣднюю пару. Задача		

при этомъ разрѣшается въ четыре переѣзда.		A, B,... L, M, a, b,... l, m,
Исключеніе составляетъ тотъ случай, когда $n = 3$, потомучто тогда $n' - 1 = 0$. Въ этомъ случаѣ возвращается мужъ съ женою, жена остается, а мужья переѣзжаютъ; затѣмъ третья женщина въ два раза перевозитъ другихъ двухъ. Всѣхъ переѣздовъ такимъ образомъ шесть.	A, a,	B, C, b, c,
	a, b,	A, B, C, c,
	a,	A, B, C, b, c,
		A, B, C, a, b, c,
Если n четное число $= 2n'$, то $n' - 1$ паръ (мужъ съ женой) возвращаются и перевозятъ послѣдняго мужа; а жена его остается; затѣмъ $n - 2$ женщины отправляются за этой послѣдней. Всѣхъ же переѣздовъ 5.	A, a,	B... L, M, b,... l, m,
	a,	A, B,... L, M, b,... l, m,
		A, B,... L, M, a, b,... l, m.

Случай, при которомъ $n = 2$, составляетъ также исключеніе и не допускаетъ условія переѣзда по $n - 1$ человѣкъ за-разъ; но, перевозя по два за-разъ легко рѣшить эту задачу.

V.

Данъ нѣкоторый грузъ, вѣсомъ отъ 1 до 40 фунтовъ включительно (безъ дробей во всякомъ случаѣ): спрашивается наименьшее число гирь, необходимыхъ для взвѣшиванія этого груза?

Форма, въ которой предлагаетъ эту задачу Башэ, представляетъ точность только по отношенію къ числу 40, имъ взятому; если же брать другія числа, то найдутся нерѣдко нѣсколько системъ гирь, изъ которыхъ каждая содержитъ наименьшее количество гирь, которыми можно сдѣлать взвѣшиванія всѣхъ грузовъ отъ 1 ф. до даннаго вѣса. Вотъ дѣйствительная форма, въ которой эта задача должна быть предложена:

Найти систему гирь, которыми можно сдѣлать всѣ взвѣшиванія въ цѣлыхъ числахъ отъ 1 фунта до суммы всѣхъ данныхъ фунтовъ, причемъ эта послѣдняя сумма и представляетъ наибольшій вѣсъ, который можно получить при найденномъ числѣ гирь.

Возьмемъ сначала только двѣ гири. Первая изъ нихъ непремѣнно должна быть 1 ф. (можно брать любую систему вѣсовъ), иначе, если вторая гиря a, то нельзя получить вѣсъ $a + 1$, который предшествуетъ суммѣ двухъ гирь.

Если взять 1 и 2 ф., можно взвѣшивать до $1+2$, т. е. до 3-хъ фунтовъ. Если взять гири въ 1 и 3 ф., можно получить вѣсъ въ 2 ф., т. е. $3-1$, положивъ гирю въ 3 ф. на одну чашку, а гирю въ 1 ф. на другую; затѣмъ можно получить вѣсъ въ $1+3$ ф. или 4 ф., т. е. болѣе чѣмъ съ гирями въ 1 и 2 фунта.

Если взять вторую гирю въ 4 ф., нельзя будетъ получить вѣса въ 2 ф.; то же будетъ и со всѣми гирями выше 3. Поэтому первыя двѣ гири должны быть 1 и 3 ф.

Возьмемъ третью гирю. Можно бы взять пяти-фунтовую, такъ какъ мы съ первыми двумя могли взвѣшивать до 4-хъ ф.; но можно также взять и 6 ф., потому что 5 ф. можно получить, положивъ 6 ф. на одну чашку вѣсовъ, а 1 ф. на другую. По той же причинѣ можно взять гирю въ 7, въ 8, и наконецъ въ 9 фунтовъ, потому что при помощи тѣхъ четырехъ взвѣшиваній, которыя мы получаемъ съ двумя первыми, гирями, можно составить четыре новые вѣса въ 5, 6, 7 и 8 фунтовъ. Вмѣсто 9-ти фунтовой гири нельзя взять большей, потому что тогда не получатся всѣ промежуточные вѣсы. Такимъ образомъ, при помощи трехъ гирь въ 1, 3 и 9 фунтовъ, мы можемъ дѣлать послѣдовательно всѣ взвѣшиванія отъ 1 до 13 фунтовъ. Разсуждая точно такимъ же образомъ съ этими 13 вѣсами, мы найдемъ, что наибольшій вѣсъ слѣдующей гири, которую мы должны взять, равняется $13 \times 2+1$ или 27 ф., и тогда съ этими 4-мя гирями мы можемъ сдѣлать всѣ взвѣшиванія до 40 ф. Затѣмъ, взявъ 5-ю гирю въ $40\times2+1$, или 81 фунтовъ, можно производить взвѣшиванія до 121 ф. и т. д.

Итакъ, если 1-ая гиря взята въ 1 ф.

2-ая » будетъ $1.2+1$, т. е. 3 ф.

3-ья гиря будетъ $(1+3)2+1$ т. е. 9 ф.
4-ая » » $(1+3+9)2+1$ т. е. 27 ф.
5-ая » » $(1+3+9+27)\ 2+1$, т. е. 81, и т. д.

Но это есть ничто иное, какъ прогрессія:

$$1,\ 3,\ 3_2, \ldots\ 3^{n-1},\ 3^n$$

потому что, взявъ сумму S первыхъ n чиселъ, получимъ

$$S = \frac{3^n - 1}{2},$$

откуда $3^n = 2S + 1$.

Поэтому гири, которыя мы отыскиваемъ, суть тѣ, которыя входятъ въ прогрессію:

$$1,\ 3,\ 3^2,\ 3^3\ 3^4,\ 3^5, \ldots$$

или

$$1,\ 3,\ 9,\ 27,\ 81,\ 243 \ldots$$

VI.

Часто требуется размѣнять крупную монету на разнаго рода мелкую такимъ образомъ, чтобы было по одинаковому числу монетъ того и другаго рода.

Напримѣръ, требуется полу-имперіалъ (5 р.) размѣнять на монеты въ 20 и 5 копѣекъ, въ одинаковомъ количествѣ. Въ пяти рубляхъ всѣхъ двухгривенныхъ 25, и, такъ какъ двугривенный въ 4 раза болѣе пятачка, то при размѣнѣ стоимость всѣхъ послѣднихъ будетъ въ четыре раза менѣе стоимости первыхъ.

Раздѣлимъ 25 двугривенныхъ на части пропорціональныя 4 и 1. Получимъ 20 двугривенныхъ и 5 двугривенныхъ или 20 пятачковъ, что и требовалось задачею.

Если бы требовалось размѣнять 3 рубля на гривенники и пятачки, то, такъ какъ въ гривенникѣ 2 пятачка, то нужно 30 гривенниковъ раздѣлить на части, пропорціональныя 2 и 1. Эти части будутъ 20 и 10 гривенниковъ или 20 пятачковъ. Можно такимъ же образомъ произвести размѣнъ болѣе, чѣмъ двумя сортами монетъ. Положимъ, напримѣръ, что нужно 5 рублей

размѣнять на одинаковое число пятачковъ, трехъ и двухкопѣечниковъ. Раздѣлимъ 100 пятачковъ на 3 части, пропорціональныя 5, 3 и 2; получимъ 50 пятачковъ, 30 пятачковъ и 20 пятачковъ, т. е. 50 пятачковъ, 50 трехкопѣечниковъ и 50 двухкопѣечниковъ.

VII.

Нѣкто умирая раздѣлилъ имущество, состоящее изъ извѣстнаго количества рублей, между своими дѣтьми такимъ образомъ, что первый получилъ 1 р. и седьмую часть остальныхъ, второй получилъ 2 р. и седьмую часть остальныхъ, третій три рубля и седьмую часть остальныхъ и т. д. до послѣдняго. Послѣ раздѣла, произведеннаго подобнымъ образомъ, оказывается, что всѣ дѣти получили поравну. Спрашивается, сколько было всего рублей и сколько лицъ участвовало въ раздѣлѣ?

Возьмемъ и рѣшимъ общій случай подобной задачи.

Пусть a, $2a$, $3a$,... будутъ суммы денегъ, которыя наслѣдники получаютъ сначала, и $\frac{1}{n}$ та часть остальныхъ денегъ, которая прибавляется каждому. Обозначимъ все наслѣдство черезъ x.

Первый наслѣдникъ получаетъ $a+\frac{x-a}{n}$; и тогда

остается $x-a-\frac{x-a}{n}$, или $\frac{(n-1)(x-a)}{n}$;

второй наслѣдникъ получаетъ $2a+\frac{(n-1)(x-a)}{n^2}-\frac{2a}{n}$;

и, такъ какъ всѣ получаютъ поравну, то

$$2a+\frac{(n-1)(x-a)}{n^2}-\frac{2a}{n}=a+\frac{x-a}{n},$$

или, упрощая уравненіе:

$$an^2+(n-1)(x-a)-2an=n(x-a);$$

откуда $$x-a=an^2-2an$$

и $$x=a(n^2-2n+1)=a(n-1)^2.$$

Тогда, подставляя въ формулу для перваго наслѣдника величину x, часть каждаго изъ прочихъ дѣтей, составитъ величину $a+an-2a$ или $a(n-1)$.

а число дѣтей слѣдовательно равно $(n-1)$,

При $a=1$, $n-1$ дѣтей получаютъ по $n-1$ рублей, и все состояніе равно $(n-1)^2$ рублей.

Такъ, въ задачѣ Башэ, 6 дѣтей получаютъ по 36 экю.

Наши вычисленія показываютъ только, что равны части двухъ первыхъ дѣтей. Посмотримъ, будутъ-ли одинаковы и части другихъ дѣтей.

Предположимъ, что k первыхъ дѣтей получили по одинаковой части $a(n-1)$, тогда, если все имущество было $a(n-1)^2$, останется еще $a(n-1)^2-ak(n-1)$: и слѣдующій наслѣдникъ получитъ

$$(k+1)a+\frac{a(n-1)^2-ak(n-1)-(k+1)a}{n},$$

величина эта превращается въ

$$\frac{a(n-1)+a(n-1)^2}{n} \text{ или } \frac{a(n-1)(1+n-1)}{n}$$

т. е. $a(n-1)$. Итакъ и третій наслѣдникъ получаетъ часть одинаковую съ двумя первыми; то же найдемъ и для четвертаго наслѣдника и т. д.

Баше при этомъ говоритъ: «Необходимо имѣть въ виду при предложенiи этой задачи постоянно одну и ту же часть; потомучто, если брать различныя части, напр. сказать, чтобы первый взялъ одну и половину остальнаго, второй 2 и одну треть остальнаго и т. д., то задача будетъ невозможною. Кромѣ того, въ данной части числитель долженъ быть непремѣнно 1, а не болѣе; потому что если предложить задачу такимъ образомъ, чтобы первый взялъ 1 и $\frac{2}{3}$ остатка, второй 2 и $\frac{2}{3}$ остатка и т. д., то задача опять-таки будетъ невозможною.

Наконецъ, она будетъ невозможною и тогда, когда числа, которыя берутся сначала

$$1,\quad 2,\quad 3,\ldots$$

или

$$a,\quad 2a,\quad 3a,\ldots$$

не будутъ составлять ариѳметической прогрессiи, въ которой разность равна первому числу прогрессiи.

Эту же задачу можно измѣнить такимъ образомъ, чтобы сначала каждый наслѣдникъ бралъ по $\frac{1}{n}$ капитала, или остатка отъ него, а потомъ соотвѣтствующiя числа a, или $2a$, или $3a$,...

Пусть x по прежнему будетъ обозначать дѣлимое имущество.

Первый наслѣдникъ беретъ $\frac{x}{n}+a$, и остается $\frac{n-1}{n}x-a$; второй получитъ тогда

$$\frac{n-1}{n^2}x-\frac{a}{n}+2a;$$

и должно получиться равенство:

$$\frac{x}{n}+a=\frac{n-1}{n^2}x-\frac{a}{n}+2a;$$

откуда $nx+an^2=(n-1)x-an+2an^2$;

и

$$x=an^2-an=an(n-1).$$

Часть перваго наслѣдника $\frac{x}{n}+a=a(n-1)+a=an$;

а число дѣтей равно $\frac{an(n-1)}{an}$, или $n-1$.

Изъ нашихъ вычисленiй видно, что части первыхъ двухъ дѣтей одинаковы; теперь посмотримъ, будутъ ли таковы и части прочихъ дѣтей.

Предположимъ, что первыя k дѣтей получили по одинаковой части an, причемъ весь капиталъ $an(n-1)$, тогда, послѣ выдѣленiя частей k дѣтей, останется еще $an(n-1)-kan$, и слѣдующiй наслѣдникъ получитъ

$$\frac{an(n-1)-ka\,n}{n}+(k+1)a;$$

и эта величина сводится къ an, т. е. часть третьяго наслѣдника одинакова съ частями первыхъ двухъ. То же получимъ, отыскивая части прочихъ дѣтей.

Эта задача, какъ и прежняя, была бы невозможною, если бы всѣ дѣти не брали одну и ту же часть $\frac{1}{n}$ каждаго остатка, или если добавочныя числа не будутъ составлять прогрессiи a, $2a$, $3a$,....

VIII.

Три человѣка имѣютъ по нѣкоторому количеству рублей. Первый изъ нихъ даетъ двумъ другимъ по-стольку, по скольку у нихъ уже есть; затѣмъ второй даетъ двумъ другимъ по стольку, по скольку у нихъ есть; и наконецъ третій даетъ двумъ другимъ по стольку же. Послѣ этого оказывается у каждаго изъ трехъ по 8 рублей. Спрашивается, сколько было у каждаго съ самаго начала.

Эта задача легко рѣшается при помощи слѣдующаго несложнаго разсужденія. Такъ какъ подъ конецъ у каждаго оказывается 8 рублей, и только-что передъ тѣмъ третій далъ первому и второму по стольку, по скольку у нихъ было, ясно, что у каждаго изъ нихъ было по 4, а у третьяго 16. Но ранѣе этого второй далъ первому и третьему столько, сколько у нихъ было, поэтому у перваго должно было быть 2, у третьяго 8 и у втораго 14. А это произошло, послѣ того, какъ первый далъ двумъ другимъ по стольку, по скольку у нихъ уже было; поэтому съ самаго начала у втораго было 7, у третьяго 4 и у перваго 13 рублей.

Должно замѣтить, что вообще для рѣшенія подобной задачи нужно всегда брать числа въ одинаковой пропорціи съ 13-ю, 7-ю, 4-мя и 8-ью; потому что при этомъ, поступая указаннымъ образомъ, подъ конецъ у всѣхъ будетъ по-равну. Поэтому, если извѣстно по сколько въ концѣ у каждаго осталось, не трудно найти сколько было у каждаго сначала; нужно только раздѣлить это число на 8 и частное умножать послѣдовательно на 13, 7 и 4. Такъ, если будетъ извѣстно, что, поступая какъ было указано, у каждаго подъ конецъ осталось по 6 р., раздѣлимъ 6 на 8; получимъ $\frac{3}{4}$; и умножая это число послѣдовательно на 13, 7 и 4, мы узнаемъ, что сначала у перваго было $9\frac{3}{4}$, у втораго $5\frac{1}{4}$, и у третьяго 3 р. Точно также, если извѣстно сколько у каждаго было денегъ сначала, легко узнать то число, которое у каждаго остается подъ конецъ. Для того, чтобы задача была возможною, необходимо, чтобы три данныя числа были въ той же пропорціи, какъ 13, 7 и 4; поэтому, если самое большее число раздѣлить на 13, или среднее на 7, или меньшее на 4, вездѣ получится одно и то же частное, которое, будучи умножено на 8, и дастъ искомое число. Такъ, если даны числа 26, 14 и 8, раздѣляя 26 на 13, или 14 на 7, или 8 на 4, получимъ одно и то же частное 2, которое у каждаго должно остаться подъ конецъ.

На основаніи этого можно дѣлать очень интересный фокусъ, отгадывая сколько каждое изъ трехъ лицъ взяло марокъ или картъ, или другихъ какихъ нибудь предметовъ. Дѣлается это такимъ образомъ.

Напримѣръ, предложите третьему лицу взять какое нибудь число марокъ, только чтобы это было вдвое четное число, т. е. которое дѣлится на 4. Затѣмъ

пусть второй возьметъ столько разъ 7 марокъ, сколько третій взялъ по-четыре, а первый пусть возьметъ столько-же разъ 13. Потомъ предложите первому дать каждому изъ двухъ другихъ столько, сколько у нихъ есть, затѣмъ пусть второй дастъ двумъ другимъ по-стольку, поскольку у нихъ есть, и наконецъ, пусть третій дастъ столько же двумъ другимъ.

Послѣ того, узнавъ число марокъ у одного изъ трехъ (у всѣхъ будетъ по-равну), раздѣлите это число на 2, и тогда полученное число будетъ именно то число марокъ, которое было взято сначала третьимъ лицомъ. Тогда не трудно узнать, сколько было сначала марокъ у двухъ другихъ, взявъ для втораго столько разъ 7, сколько разъ 4 содержится въ извѣстномъ числѣ марокъ третьяго, а для перваго столько же разъ 13. Напримѣръ, если третьимъ было взято сначала 12 марокъ, то второй долженъ былъ взять 21, и первый 39, и, послѣ того какъ будетъ произведена раздача марокъ указаннымъ способомъ, у каждаго окажется по 24, а половина 24-хъ, т. е. 12, есть ровно то число марокъ, которое было взято сначала третьимъ лицомъ. Это все то же правило, которое мы дали выше, потому что мы тамъ говорили, что нужно послѣднее число раздѣлить на 8 и частное умножать послѣдовательно на 13, 7 и 4, а извѣстно, что раздѣлить какое нибудь число на 8 и помножить затѣмъ частное на 4, все равно что взять $^4/_8$ того числа, т. е. $^1/_2$.

Можно вывести общую формулу для рѣшенія всѣхъ подобныхъ задачъ, даже измѣняя пропорцію марокъ, которая дается однимъ изъ трехъ лицъ двумъ другимъ; напр., если каждый долженъ будетъ давать двумъ другимъ вдвое, или втрое, или вчетверо болѣе, чѣмъ у нихъ есть марокъ.

Вотъ эта общая формула.

Если лицу, имѣющему нѣкоторую сумму a, дать

n разъ столько, сколько у него было сначала, то у него всего будетъ $n\,a + a$, или $(n+1)\,a$; слѣдовательно то, что было у даннаго лица сначала, составляетъ $\frac{1}{n+1}$ часть того, что оно имѣетъ въ настоящее время. Такимъ образомъ, если подъ конецъ у всѣхъ трехъ лицъ будетъ по суммѣ a, должно заключить, что до распредѣленія денегъ третьимъ лицомъ:

Первое имѣло . . . . $\frac{1}{n+1}\,a$, (1)

второе . . . . $\frac{1}{n+1}\,a$, (2)

и что третье лицо, у котораго было остальное, имѣло $3\,a - \frac{2}{n+1}\,a$,

что сводится къ . . . . $\frac{3n+1}{n+1}\,a$. (3)

Но такъ какъ эти суммы составились, послѣ того какъ была произведена раздача денегъ вторымъ лицомъ, то мы должны заключить, что до этой раздачи,

первое лицо имѣло . . . . . $\frac{1}{(n+1)^2}\,a$, (1)

третье , ... $\frac{3\,n+1}{(n+1)^2}\,a$. (2)

и что второе лицо имѣло остальное; т. е.

$3\,a - \frac{1}{(n+1)^2}\,a - \frac{3\,n+1}{(n+1)^2}\,a$,

или . . . . $\frac{3\,n^2+3\,n+1}{(n+1)^2}\,a$, (2)

Эти части составились послѣ раздачи денегъ первымъ

лицомъ, отсюда мы заключаемъ, что

третье лицо имѣло . . . . . $\frac{3n+1}{(n+1)^3}\, a,$ (3)

второе . . . . $\frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}\, a,$ (2)

а первое

$$3a - \frac{3n^2+3n+1}{(n+1)^3}a - \frac{3n+1}{(n+1)^3}a,$$

что равно . . . . $\frac{3n^3+6n^2+3n+1}{(n+1)^3}\, a.$ (1)

Чтобы избѣжать дробей можно взять:

$$a = (n+1)^3 b,$$

и тогда три числа будутъ:

$(3n^3 + 6n^2 + 3n + 1)\, b,\quad (3n^2 + 3n + 1)\, b,\quad (3n + 1)\, b.$

Вотъ правило, которое предлагаетъ Башэ для составленія коеффиціентовъ къ b; при этомъ n онъ называетъ показателемъ отношенія.

Утроивъ показателя отношенія и прибавивъ 1, получимъ третье число; и если къ этому числу прибавимъ 2, умножимъ все на показателя отношенія и къ произведенію прибавимъ 1, получимъ второе число; наконецъ, чтобы получить первое число, надо сложить два уже найденныя числа, къ суммѣ ихъ прибавить 1, все это умножить на показателя отношенія и къ произведенію прибавить 1.

При $n = 1$, три искомые коеффиціенты будутъ 13, 7, 4.

При $n = 2$, они будутъ: 55, 19 и 7.

Башэ не указываетъ откуда онъ вывелъ это правило; онъ говоритъ только, что оно вѣрно потому, что основано на алгебраическомъ вычисленіи.

IX.

Три человѣка должны раздѣлить между собою 21 боченокъ, изъ которыхъ семь полны вина, семь наполнены на половину, и семь пустыхъ. Какимъ образомъ долженъ быть сдѣланъ раздѣлъ, чтобы всѣ трое получили по одинаковому числу боченковъ и одинаковому количеству вина?

Очевидно, каждый долженъ получить по числу боченковъ, которое можетъ быть выражено черезъ $\frac{21}{3}$, т. е. по 7 боч.; поэтому подобная задача возможна только въ томъ случаѣ, когда это первое частное будетъ цѣлое число.

Что касается раздѣла вина, мы должны замѣтить, что, такъ какъ все количество его равно 21-му полубоченку, то каждый долженъ имѣть количество равное 7 полубоченкамъ. Отсюда мы прежде всего заключаемъ, что у каждаго не можетъ быть только двухъ родовъ боченки: полные и пустые, иначе это составило бы четное число полубоченковъ вина. Поэтому, если мы на время откинемъ боченки, наполненные на половину, которыхъ очевидно нечетное число, остальные составятъ

четное число бочекъ; откуда мы можемъ заключить, что у каждаго столько же полныхъ боченковъ, сколько и пустыхъ, и что слѣдовательно число каждыхъ ни въ какомъ случаѣ не болѣе половины 6-ти.

Установивъ это, раздѣлимъ 7 на три части, изъ которыхъ ни одна не будетъ болѣе 3, напр.

1, 3 и 3.

Будемъ соотвѣтственно этимъ числамъ распредѣлять между тремя данными лицами полные и пустые боченки. Когда такимъ образомъ эти два сорта боченковъ будутъ распредѣлены, нужно распредѣлить и остальные 7 полубоченковъ вина, такимъ образомъ, чтобы у каждаго составилось по 7 полубоченковъ.

При помощи частей, на которыя мы разложили число 7, мы получаемъ слѣдующее рѣшеніе.

Соотвѣтственно первому числу 1, одно лицо беретъ 1 полный боченокъ и 1 пустой и затѣмъ, чтобы у него составилось 7 полубоченковъ вина, беретъ 5 боченковъ наполненныхъ на половину; соотвѣтственно второму числу 3, другое лицо беретъ 3 пустыхъ боченка, 3 полныхъ и 1 полный на половину; и наконецъ, соотвѣтственно третьему числу 3, послѣднее лицо беретъ столько же, сколько предыдущее.

Можно также разложить число 7 на 2, 2 и 3, что даетъ намъ второе рѣшеніе этой задачи.

Если бы вмѣсто 21 бочки было 27, изъ которыхъ 9 полныхъ, 9 пустыхъ и 9 наполненныхъ на-половину, то раздѣляя ихъ между тремя лицами, каждому должно дать 9, и такъ какъ число 9 можно разложить

на 3, 3, 3,
или 2, 3, 4,
или 1, 4, 4,

то мы имѣли бы три рѣшенія той же задачи.

Положимъ теперь, что нужно раздѣлить между 4-мя лицами 24 бочки вина, изъ которыхъ 8 полныхъ, 8 пустыхъ и 8 полныхъ на половину.

Здѣсь Башэ впадаетъ положительно въ ошибку; онъ, правда, распредѣляетъ 24 боченка, но для этого онъ беретъ 6 полныхъ и 6 пустыхъ боченковъ, т. е. 12 на половину наполненныхъ.

Каждый изъ четырехъ долженъ получить 6 боченковъ и количество вина равное шести полубоченкамъ; но для этого нужно разложить на части число 8, а не 6, какъ это дѣлаетъ Башэ. Раздѣлимъ 8 на четыре части такъ, чтобы ни одна изъ частей не превышала 3-хъ, половины 6-ти, при этомъ можно одну изъ частей обозначить черезъ 0.

Получимъ четыре рѣшенія:

2, 2, 2, 2,
3, 2, 2, 1,
3, 3, 1, 1,
3, 3, 2, 0.

Послѣднее рѣшеніе показываетъ, что одно лицо должно получить 3 полныхъ боченка и 3 пустыхъ, другое лицо должно также получить 3 полныхъ и 3 пустыхъ боченка; третье лицо должно получить 2 полныхъ боченка и 2 пустыхъ и 2 наполненныхъ на половину, послѣднее же лицо получаетъ 6 полубоченковъ.

Возьмемъ еще слѣдующую задачу:

Раздѣлить между двумя лицами 24 боченка, изъ которыхъ 5 полныхъ, 8 пустыхъ и 11 полуполныхъ, такъ, чтобы всѣ трое получили по одному числу боченковъ и одинаковому количеству вина.

Легко видѣть, что каждое лицо должно получить по 8-ми бочекъ и по количеству вина равному 7-ми полу-

боченкамъ; поэтому одно лицо не можетъ имѣть болѣе трехъ полныхъ бочекъ, но оно можетъ не имѣть ни одного полнаго боченка, а имѣть 7 наполненныхъ на половину и одинъ пустой. Такимъ образомъ 5 полныхъ бочекъ можно распредѣлить слѣдующими тремя способами:

0, 2, 3,
1, 2, 2,
1, 1, 3.

что даетъ намъ три рѣшенія:

	1-ое рѣшеніе.	2-ое рѣшеніе.	3-е рѣшеніе.
Полные боченки	0, 2, 3;	1, 2, 2;	1, 1, 3;
Наполненные на половину	7, 3, 1;	5, 3, 3;	5, 5, 1;
Пустые	1, 3, 4;	2, 3, 3;	2, 2, 4.

X.

41 человѣкъ мужчинъ, женщинъ и дѣтей, обѣдая вмѣстѣ, истрачиваютъ вмѣстѣ 40 пятиалтынныхъ, но при этомъ каждый мужчина платитъ 4 пятиалтынныхъ, каждая женщина 3 пятиалтынныхъ и каждый ребенокъ пять копѣекъ. Спрашивается, сколько было мужчинъ, женщинъ и дѣтей?

Возьмемъ сначала задачу, въ которую входятъ только два рода лицъ: напр. 42 человѣка мужчинъ и женщинъ, истратили 160 копѣекъ, причемъ на долю каждаго мужчины пришлось по 5 копѣекъ, а на каждую женщину по 3 k.

Можно разсуждать такимъ образомъ: если бы все общество состояло изъ однѣхъ женщинъ, онѣ истратили бы 42×3 или 126 k., что съ 160 составляетъ разность въ 34 k.; поэтому, чтобы издержка увеличилась до 160 k., надо извѣстное число женщинъ замѣнить мужчинами. Такъ какъ каждый мужчина истрачиваетъ болѣе каждой женщины на 2 k., то нужно вмѣсто женщинъ поставить столько мужчинъ, сколько разъ 2 содержится въ 34-хъ. Слѣдовательно общество состояло изъ 17-ти мужчинъ и 25-ти женщинъ.

Нѣкоторые математики распространяютъ это разсужденіе и на тотъ случай, когда имѣется три рода лицъ. Такъ для задачи, предложенной Башэ, они гово-

рятъ: если бы были одни дѣти, они истратили бы $\frac{41}{3}$ пятиалтынныхъ, что съ 40 пятиалтынными составитъ разницу въ $\frac{120}{3} - \frac{41}{3}$ или $\frac{79}{3}$ пятиалтынныхъ. Далѣе, такъ какъ каждый мужчина, поставленный на мѣсто ребенка, увеличиваетъ издержку на $4 - \frac{1}{3}$ или $\frac{11}{3}$ пятиалтынныхъ, а каждая женщина увеличиваетъ издержку на $3\frac{1}{3}$ или $\frac{8}{3}$ пятиалтынныхъ, то надо $\frac{79}{3}$ раздѣлить на два такія числа, чтобы одно было кратное $\frac{11}{3}$, а другое кратное $\frac{8}{3}$ или, проще сказать, должно 79 раздѣлить на 2, такія числа, чтобы одно было кратное 11-ти, а другое кратное 8-ми. Для того чтобы рѣшить задачу, надо изъ 79 отнимать сумму $11 + 8$ или 19 сколько возможно разъ, пока не получится въ остаткѣ кратное отъ 11 или отъ 8. Въ данномъ примѣрѣ, вычтя изъ 79-ти 3 раза 19, въ остаткѣ получимъ 22; отсюда мы заключаемъ, что въ 79 содержится 5 разъ 11 и 3 раза 8; слѣдовательно общество состояло изъ 5-ти мужчинъ, 3-хъ женщинъ и 33 дѣтей.

Башэ рѣшаетъ эту задачу слѣдующимъ образомъ. Обозначимъ число мужчинъ черезъ x; издержка ихъ тогда равна $4x$ пятиалтынныхъ; число женщинъ и дѣтей равно будетъ $41 - x$, и ихъ издержка будетъ $40 - 4x$. Это послѣднее число должно заключать три раза число женщинъ и одну треть числа дѣтей; поэтому, если мы помножимъ его на 3, то произведеніе $120 - 12x$ будетъ содержать 9 разъ число женщинъ и 1 разъ число дѣтей. Если мы изъ этого послѣдняго числа вычтемъ теперь $41 - x$, гдѣ число женщинъ и дѣтей заключается по одному разу, то въ остаткѣ получится число, въ которомъ число женщинъ содержится 8 разъ.

Остатокъ этотъ $79 - 11x$, поэтому число женщинъ равно $\frac{79 - 11x}{8}$, а число дѣтей слѣдовательно будетъ $41 - x - \frac{79 - 11x}{8}$ или $\frac{249 + 3x}{8}$.

Изъ формулы, которую мы получили для числа женщинъ, видно, что $11x$ должно быть < 79-ти или $x < 7\frac{2}{11}$.

Величина, которую мы получили для числа дѣтей, обращается въ $31 + \frac{1 + 3x}{8}$; и для того чтобы это было цѣлое число, нужно, чтобы $1 + 3x$ было кратное числа отъ 8-ми. Поэтому надо найти число кратное отъ 8, которое превышало бы на 1-цу какое нибудь кратное отъ 3-хъ, и, если это кратное 3-хъ не будетъ болѣе чѣмъ 7 разъ 3, потому что x не можетъ быть болѣе 7, то задача будетъ рѣшена. Мы найдемъ, что задачѣ въ данномъ случаѣ удовлетворяетъ число 16, и что, слѣдовательно, общество состояло изъ $31 + \frac{16}{8}$, т. е. 33 дѣтей, 5 мужчинъ (такъ какъ 5 есть величина x въ уравненіи $1 + 3x = 16$) и 3-хъ женщинъ.

Возьмемъ еще задачу: 20 человѣкъ истратили 20 двугривенныхъ; каждый мужчина заплатилъ 4 двугривенныхъ, каждая женщина $\frac{1}{2}$ и каждый ребенокъ $\frac{1}{4}$ двугривеннаго.

Если число мужчинъ обозначить черезъ x, издержка ихъ будетъ $4x$, и тогда число женщинъ и дѣтей будетъ $20 - x$ и ихъ издержка $20 - 4x$. Это послѣднее число содержитъ въ себѣ половину числа всѣхъ женщинъ и четверть числа дѣтей; поэтому, если его помножить на 4, то произведеніе $80 - 16x$ будетъ заключать въ себѣ двойное число женщинъ и одинъ разъ

число дѣтей. Теперь, если отсюда вычесть $20-x$ (гдѣ заключается по одному разу число дѣтей и число женщинъ), остатокъ $60-15x$ будетъ выражать число женщинъ, а разность между $60-15x$, и $20-x$ или $14x-40$ будетъ число дѣтей. Величина $60-15x$, которая показываетъ число женщинъ, показываетъ, что $15x$ должно быть <60-и или $x<4$-хъ, а число дѣтей $14x-40$ требуетъ, чтобы было $14x>40$ или чтобы было $x>2\frac{6}{7}$. Но такъ какъ между $2\frac{6}{7}$ и 4-мя есть только одно цѣлое число 3, то мы заключаемъ, что общество состояло изъ 3-хъ мужчинъ, 15-ти женщинъ и 2-хъ дѣтей.

Башэ, которому принадлежитъ способъ рѣшенія этой задачи, кончая ее, говоритъ слѣдующее:

«Я прибавлю здѣсь и въ концѣ книги то, что я нашелъ, разбирая двѣ послѣднія задачи XVII-ой книги первой части Ариѳметики Тарталія (Tartaglia).

Въ первой онъ предлагаетъ раздѣлить 100 на четыре цѣлыхъ числа такимъ образомъ, чтобы, умножая первое на 3, второе на 1, третье на $\frac{1}{3}$, четвертое на $\frac{1}{2}$, сумма всѣхъ произведеній была-бы также равна 100. Онъ даетъ одно рѣшеніе этой задачи, употребляя числа: 19, 22, 51 и 8, и прибавляетъ, что онъ не можетъ дать твердаго правила для рѣшенія подобныхъ задачъ. Я нашелъ при помощи безошибочнаго разсужденія, основаннаго на самыхъ точныхъ доказательствахъ, что эта задача дастъ безконечное множество рѣшеній, если допустить дроби, такъ какъ на мѣсто перваго числа можно поставить какое угодно, меньшее 25-ти. Но въ цѣлыхъ числахъ эта задача допускаетъ только 226 рѣшеній, потому-что первымъ числомъ можно взять любое большее 1 и не превышающее 24, и если первымъ числомъ возьмемъ 24, мы получимъ 3 рѣшенія; если возьмемъ 23 получимъ 7 рѣшеній; далѣе число 22 дастъ 11 рѣшеній,

21 дастъ 15, 20 дастъ 19 рѣшеній, 19 дастъ 18 рѣшеній, 18 дастъ 17 и т. д., постепенно уменьшая первое число на 1, мы дойдемъ до 2-хъ, которое дастъ только одно рѣшеніе.

Мы находимъ неудобнымъ помѣщать здѣсь всѣ 226, рѣшеній, но для того, чтобы дать читателямъ образчикъ подобныхъ рѣшеній, мы помѣстили здѣсь 18 рѣшеній, которыя получатся, если взять первымъ числомъ 19.

19 23 54 4	19 22 51 8	19 21 48 12	19 20 45 16	19 19 42 20	19 18 39 24	19 17 36 28	19 16 33 32	19 15 30 36
19 14 27 40	19 13 24 44	19 12 21 48	19 11 18 52	19 10 15 56	19 9 12 60	19 8 9 64	19 7 6 68	10 6 3 72

Вотъ какъ Башэ рѣшаетъ задачи подобнаго рода въ своихъ комментаріяхъ къ задачѣ 41-й, четвертой книги Діофанта.

Пусть x будетъ первое число; умноженное на 3, оно дастъ $3x$. Сумма остальныхъ чиселъ будетъ $100-x$, а сумма ихъ произведеній послѣдовательнаго умноженія на 1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ будетъ $100-3x$; это число должно быть очевидно болѣе $(100-x)\times\frac{1}{2}$; поэтому $100-3x$ должно быть менѣе $300-9x$, откуда мы заключаемъ, что $8x$ должно быть <200 или $x<25$-и.

Возьмемъ $x=24$: сумма остальныхъ чиселъ будетъ тогда 76, а сумма ихъ произведеній отъ умноженія на

1, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ будетъ 28. Если поэтому y будетъ вторымъ числомъ, сумма двухъ остальныхъ будетъ 76—y, и сумма ихъ произведеній отъ умноженія на $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ будетъ 28—y. Эта послѣдняя сумма, слѣдовательно, будетъ заключать въ себѣ $\frac{1}{3}$ третьяго числа и $\frac{1}{2}$ четвертаго; поэтому, если помножить это число на 6, то произведеніе 168—6y будетъ заключать 2 раза третье число и 3 раза четвертое. Помноживъ теперь 76—y на 2, получимъ число, въ которомъ 2 раза содержится третье число и 2 раза четвертое; поэтому, если мы изъ 168—6y вычтемъ 2 (76—y), то въ полученной разности 16—4y будетъ содержаться одинъ разъ четвертое число, а слѣдовательно, если вычтемъ изъ 76—y 16—4y, то получимъ разность 60+3y, гдѣ заключается одинъ разъ третье число.

Такъ какъ четвертое число выражается черезъ 16—4y, то нужно, чтобы 4y было $<$ 16 или $y < 4$; поэтому если первое число 24, второе можетъ быть 1, 2, или 3, третье можетъ быть 63, 66 или 69, а четвертое 12, 8 или 4.

Точно также отыскиваются рѣшенія при x=23-хъ, x=22-хъ, x=21 и т. д.

Возьмемъ еще случай когда x=19-и. Отъ умноженія на 3 получимъ 57; сумма остальныхъ чиселъ будетъ 81, и сумма ихъ произведеній отъ умноженія 1, на $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ будетъ 43. Поэтому, если возьмемъ вторымъ числомъ y, то сумма двухъ остальныхъ будетъ 81—y, и сумма ихъ произведеній отъ умноженія на $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{2}$ будетъ 43—y. Поступая, какъ было указано выше, мы найдемъ, для четвертаго числа величину 96—4y, а для

третьяго величину 3y—15. Отсюда видно, что должно взять $4y < 96$ или $y < 24$, и $3y > 15$ или $y > 5$; а потому y можетъ быть какое угодно число между 6 и 23, что даетъ намъ 18 рѣшеній. При помощи величинъ 3y—15 и 96—4y можно вычислить соотвѣтствующія величины для третьяго и четвертаго числа.

Вторая задача Тарталія состоитъ въ томъ, что требуется раздѣлить 200 на пять такихъ частей въ цѣлыхъ числахъ, чтобы сумма произведеній отъ послѣдовательнаго умноженія этихъ частей на 12, 3, 1, $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ составила бы также число 200. Тарталія съ гордостью указываетъ на найденное имъ одно рѣшеніе, когда первымъ числомъ будетъ 6, вторымъ 12, третьимъ 34, четвертымъ 52 и пятымъ 96. Но я утверждаю, что эта задача допускаетъ 6639 рѣшеній и всѣ въ цѣлыхъ числахъ, такъ какъ можно взять за первое число любое не превышающее $11^3/_7$, а, взявъ первымъ числомъ 11, получимъ 3 рѣшенія; взявъ 10, получимъ 60 рѣшеній; взявъ 9, получимъ 200 рѣшеній; взявъ 8, получимъ 388 рѣшеній; взявъ 7, получимъ 571 рѣшеніе; далѣе 6 даетъ 704 рѣшенія; 5 даетъ 832 рѣшенія; 4 даетъ 914 рѣшеній; 3 даетъ 977, 2 даетъ 985 рѣшеній, 1 даетъ 1005 рѣшеній.

Здѣсь невозможно, конечно, привести всѣ эти рѣшенія, а потому я удовольствуюсь тѣмъ, что помѣщу здѣсь 44 рѣшенія, которыя получаются, если первымъ числомъ взять 6, а вторымъ 12, какъ въ рѣшеніяхъ, ныхъ у Тарталія.

6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
46	45	44	43	42	41	40	39	38	37	36
4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44
132	129	126	123	120	117	114	111	108	105	102
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
35	34	33	32	31	30	29	28	27	26	25
48	52	56	60	64	68	72	76	80	84	88
99	96	93	90	87	84	81	78	75	72	69
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14
92	96	100	104	108	112	116	120	124	128	132
66	63	60	57	54	51	48	45	42	39	36
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12
13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3
136	140	144	148	152	156	160	164	168	172	176
33	30	27	24	21	18	15	12	9	6	3

ПРИБАВЛЕНІЕ.

ЗАДАЧА I.

Два араба собираются обѣдать; у одного изъ нихъ 5 блюдъ, а у другаго 3, и всѣ они одной стоимости. Приходитъ третій и проситъ позволенія отобѣдать съ ними, обѣщая заплатить за свою долю обѣда, что и дѣлаетъ, уплативъ 8 динаріевъ. Спрашивается, какъ два другіе араба должны раздѣлить между собою эти 8 динаріевъ?

Изъ задачи видно, что на долю каждаго приходится 8 динаріевъ; поэтому весь обѣдъ стоилъ 24 динарія. Отсюда мы заключаемъ, что каждое блюдо стоило 3 динарія, и что тотъ изъ арабовъ, у котораго было 5 блюдъ, издержалъ на обѣдъ 15 динаріевъ, а потому, вычтя отсюда его собственную долю обѣда, мы найдемъ, что онъ долженъ изъ денегъ третьяго араба получить 7 дичаріевъ. Точно также ясно, что арабъ, у котораго было 3 блюда, издержалъ на обѣдъ 9 динаріевъ, а потому, за вычетомъ собственной доли обѣда въ 8 динаріевъ, долженъ получить 1 динарій.

ЗАДАЧА II.

Двигатель, который долженъ пройти разстоянiе въ 173 метра, подвигается на 9 метровъ впередъ въ каждый нечетный часъ, и отодвигается на 5 метровъ въ каждый четный часъ. Спрашивается, во сколько времени онъ пройдетъ назначенное разстоянiе?

Казалось-бы, задачу слѣдуетъ рѣшать, разсуждая такъ: Въ два часа двигатель подвигается на 9 — 5 или 4 метра; и, такъ какъ 173 метра содержатъ въ себѣ 43 раза по 4 метра и еще 1 метръ, то двигатель пройдетъ все разстоянiе въ 43×2 часа $+ \frac{1}{9}$ часа для послѣдняго метра, т. е. въ $86\frac{1}{9}$ часа.

Но такое рѣшенiе будетъ невѣрно, потому-что въ послѣднiй часъ, когда двигатель доходитъ до конца данной линiи, должно оставаться еще болѣе 5-ти метровъ разстоянiя, потому-что передъ тѣмъ онъ долженъ былъ отступить на 5 метровъ, но вмѣстѣ съ тѣмъ не должно оставаться болѣе 9-ти, иначе это разстоянiе нельзя будетъ пройти въ часъ. Поэтому, дѣля 173 на 4, должно взять такое частное, чтобы получился остатокъ

болѣе 5-ти и не болѣе 9-ти. Этого мы достигнемъ, если вмѣсто 43-хъ, возьмемъ 41; и, такъ какъ тогда остатокъ будетъ $=9$, то мы должны заключить, что двигатель пройдетъ данное разстоянiе въ $41 \times 2 + 1$ ч., или 83 часа.

ЗАДАЧА III.

Нѣкто взялъ въ одну руку 3 марки, а въ другую 6; узнать, не спрашивая у него ничего, въ которой изъ рукъ 3 марки.

Предложите этому лицу удвоить число марокъ въ правой рукѣ и утроить число ихъ въ лѣвой, затѣмъ сложить полученныя произведенія и сумму раздѣлить на 2. Если потомъ изъ этого частнаго можно вычесть 11, то 3 марки находятся въ правой рукѣ.

Дѣйствительно, въ этомъ случаѣ будутъ слѣдующія вычисленія: $3 \times 2 = 6$, $6 \times 3 = 18$, $6 + 18 = 24$, $24 : 2 = 12$, $12 - 11 = 1$. Между тѣмъ какъ еслибы, 3 марки были въ лѣвой рукѣ, вычисленія были-бы: $6 \times 2 = 12$, $3 \times 3 = 9$, $12 + 9 = 21$, $21 : 2 = 10\frac{1}{2}$, откуда уже нельзя будетъ вычесть 11. Для того, чтобы замаскировать задачу, можно предложить сдѣлать еще нѣсколько вычисленій, напр., узнавъ, что изъ послѣдняго числа нельзя вычесть 11, и, не показывая виду, что только это и надо знать, можно предложить вычесть другое меньшее и затѣмъ остатокъ умножить на 2, прибавить 5 и т. д.

Вообще съ двумя количествами вещей a и $2a$, вы-

численія приводятъ къ $4a$, если a было въ правой рукѣ, и къ $3a + \frac{a}{2}$, если a въ лѣвой рукѣ. Поэтому, предложивъ вычесть число, заключающееся между $4a$ и $3a + \frac{a}{2}$, вычитаніе это будетъ невозможно во второмъ случаѣ.

ЗАДАЧА IV.

Кто нибудь выбралъ изъ колоды въ 32 карты одну; сдѣлать такъ, чтобы эта карта очутилась въ извѣстномъ ряду, назначенномъ впередъ.

Предложите кому нибудь выбрать карту изъ колоды и запомнить, какою по счету она лежала, начиная считать съ нижней карты; затѣмъ объявите, что, по вашему желанію, карта эта очутится, напримѣръ, въ 20-мъ ряду сверху. Возьмите затѣмъ карты и переложите снизу колоды наверхъ 20 картъ (для того, чтобы не знали какое число картъ перекладывается, можно сдѣлать это подъ столомъ или за спиною); потомъ отдайте колоду и спросите, какою по счету снизу была выбранная карта. Если рядъ ея менѣе 20, напр. 15, то это значитъ, что при переложеніи 20-ти картъ она попала на верхъ колоды и тогда ей будутъ предшествовать 20—15 картъ; рядъ же ея будетъ 20—15+1. Поэтому, если вы предложите переложить снизу колоду наверхъ 15—1 или 14 картъ, то рядъ выбранной карты будетъ 20-й, т. е. обѣщанный вами сначала. Напротивъ того, если рядъ карты болѣе 20, 25 напримѣръ, то такъ какъ сначала рядъ карты, считая снизу, былъ 32—25+1, теперь онъ будетъ 20+33—25 и потому для

того, чтобы выбранная карта очутилась 20-ю сверху, нужно переложить сверху внизъ колоды 33—25 или 8 картъ.

Вообще, если a будетъ рядъ выбранной карты и b рядъ, назначенный вами, то нужно переложить снизу на верхъ колоды b картъ и узнать первоначальный рядъ a. Если a менѣе b, нужно заставить переложить на верхъ колоды еще a—1 картъ, а если a болѣе b, нужно переложить сверху внизъ 33—a картъ.

Тогда выбранная кѣмъ нибудь карта будетъ лежать въ назначенномъ ряду.

ЗАДАЧА V.

Однажды Бахусъ, воспользовавшись сномъ Силэна, взялъ его урну съ виномъ и сталъ изъ нея пить. Но недолго ему пришлось наслаждаться, Силэнъ проснулся, вырвалъ у него урну и потопилъ свое горе въ остаткѣ вина. Бахусъ пилъ всего втеченіи трехъ десятыхъ того времени, какое нужно было бы Силэну одному для того, чтобы выпить цѣлую урну. Когда урна опустѣла, онъ увидѣлъ, что на его долю чудеснаго напитка пришлось только четверть того, что выпилъ Силэнъ. Если бы съ самаго начала оба принялись пить вино изъ урны въ одно и то же время, то они опорожнили бы ее въ 8 четвертей часа. Спрашивается, сколько понадобилось бы времени каждому порознь, чтобы выпить всю урну?

Изъ этой задачи видно, что Бахусъ выпилъ только $\frac{1}{5}$ урны, и что на долю Силэна досталось $\frac{4}{5}$. Слѣдовательно урна была опорожнена въ $\frac{3}{10}+\frac{4}{5}$ или въ $\frac{11}{10}$ того времени, въ какое Силэнъ одинъ могъ-бы выпить всю урну.

Съ другой стороны, если-бы они пили вмѣстѣ въ

продолженіе такого промежутка времени, въ какой Бахусъ пилъ одинъ, они выпили-бы изъ урны $\frac{1}{5}+\frac{3}{10}$ или $\frac{5}{10}$. Такимъ образомъ половина урны была-бы выпита въ $\frac{3}{10}$ того времени, какое понадобилось-бы для одного Силэна, т. е. на $\frac{5}{10}$ менѣе времени, чѣмъ въ первомъ случаѣ.

Эти $\frac{5}{10}$ соотвѣтствуютъ 2 часамъ, т. е. Силэнъ выпилъ-бы половину урны въ 2 часа, и, слѣдовательно цѣлую урну въ 4 часа времени.

Что касается Бахуса, то, такъ какъ время необходимое для каждаго, чтобы выпить $\frac{1}{5}$ урны, можетъ быть выражено черезъ $\frac{3}{10}$ и $\frac{1}{5}$, что составляетъ пропорцію $\frac{3}{2}$, слѣдовательно Бахусъ, чтобы выпить всю урну, долженъ былъ-бы употребить $4\times\frac{3}{2}$ или 6 часовъ.

ЗАДАЧА VI.

Одинъ хозяинъ сдѣлалъ въ своемъ погребѣ для вина квадратный ящикъ изъ 9-ти клѣтокъ; средняя была назначена для пустыхъ бутылокъ, а полныя бутылки, въ числѣ 60-ти, были размѣщены въ 8-ми остальныхъ клѣткахъ такъ, что въ угловыхъ было по 6-ти бутылокъ, и въ среднихъ по 9-ти. Слуга укралъ и продалъ сначала 4 бутылки, а остальныя размѣстилъ такъ, чтобы въ трехъ клѣткахъ каждой стороны квадрата было 21 бут. Хозяинъ, обманутый этимъ размѣщеніемъ, подумалъ, что слуга переставилъ только бутылки, а число ихъ осталось то же. Слуга же, пользуясь простотою хозяина, укралъ еще 4 бут. и затѣмъ еще и т. д. до тѣхъ поръ, пока нельзя было болѣе красть 4 бутылокъ, потому-что невозможно было остальныя размѣстить такъ, чтобы на всякой сторонѣ квадрата приходилось 21 бут. Спрашивается, какимъ образомъ это дѣлалось и сколько бутылокъ было украдено?

Обозначимъ черезъ a число бутылокъ, помѣщенныхъ въ каждомъ изъ угловъ, и черезъ b число ихъ въ каждой изъ остальныхъ клѣтокъ, мы найдемъ, что все число бутылокъ будетъ:

$$2(a+b+a)+2b;$$

поэтому, если $a+b+a$ останется неизмѣненнымъ, то число бутылокъ будетъ уменьшаться съ уменьшеніемъ b; и если b уменьшится на 2, то все число бутылокъ уменьшится на 4. Слѣдовательно, слуга бралъ всякій разъ по двѣ бутылки изъ каждой средней клѣтки, т. е. всего 8, затѣмъ изъ нихъ 4 размѣщалъ по угловымъ клѣткамъ, а остальныя 4 бралъ себѣ. Такъ какъ въ нашей задачѣ первоначально въ каждой средней клѣткѣ находится по 9 бутылокъ, то онъ можетъ 4 раза повторить эту операцію и украсть такимъ образомъ у хозяина 16 бут.

Первонач. размѣщеніе.

6	9	6
9		9
6	9	6

Первое перемѣщеніе.

7	7	7
7		7
7	7	7

Второе перем.

8	5	8
5		5
8	5	8

Третье перемѣщеніе.

9	3	9
3		3
9	3	9

Четвертое перемѣщеніе.

10	1	10
1		1
10	1	10

Мы предполагали, что слуга удерживалъ симетрію первоначальнаго размѣщенія, но можно также предположить и неправильное размѣщеніе, только бы сумма s бутылокъ на каждой сторонѣ квадрата была одна и та же. Если обозначимъ черезъ m, n, p, q, число бутылокъ въ угловыхъ клѣткахъ, то все число буты-

локъ будетъ $4s-(m+n+p+q)$; и это число будетъ уменьшаться съ увеличеніемъ $m+n+p+q$, въ то время какъ s будетъ оставаться неизмѣннымъ.

m	f	n
k		g
p	h	q

Напримѣръ, если мы отъ f и k возьмемъ по какому нибудь числу x бутылокъ и помѣстимъ x бутылокъ въ m, число s не перемѣнится, а число всѣхъ бутылокъ уменьшится на x. То же было бы, если по x бутылокъ взять изъ f и g и помѣстить x въ n и т. д. Точно также, если взять по x бутылокъ отъ каждаго изъ чиселъ f, g, h, k, и помѣстить по x бутылокъ въ m и q, или въ n и p, или по $\frac{x}{2}$ въ m, n, p, q, то число s не измѣняется, а число всѣхъ бутылокъ уменьшится на $2x$. Такъ, что можно, по желанію, уменьшать все число бутылокъ на 1, на 2, на 3, и т. д.

Для какой нибудь опредѣленной суммы s, maximum числа бутылокъ получится тогда, когда не будетъ вовсе бутылокъ въ угловыхъ клѣткахъ: этотъ maximum равенъ $4s$; minimum же числа бутылокъ будетъ имѣть мѣсто, когда не будетъ бутылокъ въ среднихъ клѣткахъ: это будетъ $2s$.

ЗАДАЧА VII.

Три карты, на которыхъ написаны буквы A, B, C, взяты тайкомъ тремя лицами, которымъ предварительно были даны числа: 12, 24 и 36. Лицу, получившему число 12, предлагаютъ прибавить къ этому числу половину числа лица, взявшаго карту A, одну треть числа лица, взявшаго карту B и четвертую часть лица взявшаго карту C. Затѣмъ спрашиваютъ сумму, которая составилась подобнымъ образомъ. Какъ узнать по этой суммѣ, какими лицами были взяты карты A, B и C?

Здѣсь возможны шесть различныхъ случаевъ:

1-ое лицо.	2-ое лицо.	3-ье лицо.
12	24	36
A	B	C
A	C	B
B	A	C
C	A	B
B	C	A
C	B	A

Такъ какъ средній множитель $\frac{1}{3}$ не равняется полусуммѣ двухъ другихъ $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{4}$, то необходимо должны получиться 6 различныхъ результатовъ (см. примѣчаніе

IV въ концѣ книги). Эти результаты (которые вычислить нетрудно) будутъ:

35, 36, 37, 39, 40, 41.

При первыхъ двухъ карта А у перваго лица, при слѣдующихъ двухъ у втораго и при двухъ послѣднихъ у третьяго. Кромѣ того надо запомнить, что при результатахъ нечетнаго ряда остальныя два лица и двѣ карты будутъ въ прямомъ порядкѣ, тогда какъ при результатахъ нечетнаго ряда эти лица и карты будутъ въ обратномъ порядкѣ.

ЗАДАЧА VIII.

Задуманное число, которое не превышаетъ 16, было умножено на 3, и произведеніе (увеличенное на 1, если оно нечетное) раздѣлено на 2; съ частнымъ было поступлено такъ же; съ новымъ частнымъ точно также, и наконецъ также съ третьимъ частнымъ. Какъ узнать задуманное число, спросивъ только рядъ каждаго произведенія, къ которому была прибавлена 1 для дѣленія на 2?

Нужно замѣтить, что для числа 16 четыре дѣленія на 2 дѣлаются безъ прибавленія единицы; при числѣ 8 только четвертое дѣленіе совершается съ прибавленіемъ единицы; при числѣ 4, третье дѣленіе; при числѣ 14, второе дѣленіе; при числѣ 5, первое дѣленіе.

Затѣмъ очевидно, что можно прибавлять или вычитать 16 изъ извѣстнаго числа, не измѣняя черезъ это способа дѣленія на 2; напримѣръ, при числѣ 5 + 16 или 21 только для перваго дѣленія нужно будетъ прибавить единицу. Далѣе, если мы будемъ производить указанныя дѣйствія надъ нѣсколькими числами, при чемъ различныя по счету дѣленія для каждаго числа, потребуютъ прибавки единицы, то, подвергнувъ тѣмъ

же дѣйствіямъ сумму этихъ чиселъ, найдемъ, что потребуютъ прибавленія единицы тѣ же по порядку дѣленія, какъ и въ отдѣльныхъ числахъ: напримѣръ, 5+14 или 19 потребовало бы прибавленія единицы при первомъ и второмъ дѣленіи на 2.

Легко, слѣдуя этимъ правиламъ, узнавать задуманное число, спросивъ только очередь дѣленія, которое потребовало прибавки единицы. Напримѣръ, если потребовалась прибавка единицы при первомъ и третьемъ дѣленіи, мы сейчасъ же заключаемъ, что было раздѣлено число 5+4, т. е. 9. Если потребовалось прибавленіе единицы при первыхъ трехъ дѣленіяхъ, очевидно было задумано число 5+14+4, но, какъ эта сумма болѣе 16-ти, то надо изъ нея вычесть 16, и тогда получится 7. Вотъ таблица 16-ти сочетаній.

ЧИСЛА	ПРОИЗОШЛО ОТЪ	ЧИСЛА	ПРОИЗОШЛО ОТЪ
1	5+4+8.	9	5+4.
2	14+4.	10	14+4+8.
3	5+14.	11	5+14+8.
4	4.	12	4+8.
5	5.	13	5+8.
6	14+8.	14	14.
7	5+14+4.	15	5+14+4+8.
8	8.	16	16.

ЗАДАЧА IX.

Пусть кто нибудь, задумавшій одно число, возьметъ еще другое большее и раздѣлитъ разность этихъ двухъ чиселъ на ихъ произведеніе, увеличенное на 1; затѣмъ это частное вычтетъ изъ большаго числа и остатокъ умножитъ на 3, что составитъ какое нибудь число A. Потомъ, взявъ снова частное отъ дѣленія разности чиселъ на ихъ произведеніе + 1, надо умножить его на большее число, прибавить единицу и все умножить на 2; тогда получится нѣкоторое число B. Наконецъ A должно раздѣлить на B. Какимъ образомъ, спросивъ послѣднее частное, можно узнать первое задуманное число?

Если первое число обозначимъ черезъ b, а второе черезъ a, то требуемыя вычисленія дадутъ намъ формулу:

$$\frac{3\left(a - \frac{a-b}{ab+1}\right)}{2\left(\frac{a-b}{ab+1}a + 1\right)}.$$

Упрощая это выраженіе, найдемъ, что оно сводится къ $\frac{3b}{2}$; поэтому первое число получится, если возьмемъ

$\frac{2}{3}$ окончательнаго результата. Пусть, напримѣръ, 5 будетъ задуманное число и 7 второе, большее число; разность ихъ=2-мъ, а произведеніе ихъ увеличенное на 1=36; частное отъ дѣленія 2 на 36 будетъ $\frac{2}{36}$ или $\frac{1}{18}$; вычитая это число изъ 7-ми, получимъ $6\frac{17}{18}$; это будетъ число А. Отъ умноженія $\frac{1}{18}$ на 7 получимъ $\frac{7}{18}$, прибавляя 1, получимъ $\frac{25}{18}$; это будетъ число В. Наконецъ раздѣлимъ $\left(6\frac{17}{18}\right)\times 3$ на $\frac{25}{18}\times 2$, получится $\frac{15}{2}$; а $\frac{2}{3}$ этого числа даютъ 5.

ЗАДАЧА X.

Написать первыя сто чиселъ на нѣсколькихъ различныхъ картахъ такимъ образомъ, чтобы зная карты, на которыхъ написано извѣстное число, узнать сейчасъ же самое число.

Всякое цѣлое число есть степень 2-хъ или сумма нѣсколькихъ степеней 2-хъ, + 1, если число нечетное. Поэтому, если сначала написать на отдѣльныхъ картахъ числа 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,... затѣмъ остальныя числа нужно написать на картахъ, на которыхъ сумма степеней 2-хъ составляетъ данное число. Напримѣръ 3 нужно написать на картахъ, содержащихъ 1 и 2, 5 на картахъ, содержащихъ числа 1 и 4, 6 на картахъ, содержащихъ 2 и 4, 7 на картахъ, содержащихъ 1, 2 и 4 и т. д. Для того, чтобы угадать число кѣмъ нибудь задуманное, достаточно показывать ему поочереди карты, спрашивая заключаетъ-ли данная карта задуманное число или нѣтъ; сумма степени 2-хъ написанныхъ на тѣхъ картахъ, на которыя будетъ указано, составятъ искомое число. (Мы разсматриваемъ число 1 какъ степень 2-хъ.

Чтобы разнообразить игру, можно отгадывать имена,

вмѣсто того, чтобы отгадывать числа. Нужно тогда каждому числу присвоить какое нибудь имя и эти имена написать на картахъ рядомъ съ соотвѣтствующими числами. Самая задача рѣшается одинаково съ предъидущей.

ЗАДАЧА XI.

Требуется разложить въ квадратѣ четыре старшія карты четырехъ мастей такимъ образомъ, чтобы въ каждый горизонтальный и вертикальный рядъ, а также и по діагоналямъ, входили въ какомъ бы то ни было порядкѣ тузъ, король, дама и валетъ и притомъ всѣ четыре различныхъ мастей.

Обозначимъ черезъ A, B, C, D фигуры картъ, не обращая вниманія на масть, а черезъ *a*, *b*, *c*, *d*—масти картъ. Тогда задача наша сводится къ построенію магическаго квадрата въ 16 клѣтокъ, въ которомъ каждый горизонтальный и вертикальный рядъ, и обѣ діагонали будутъ заключать буквы A, B, C, D, и буквы *a*, *b*, *c*, *d*, во всѣхъ возможныхъ сочетаніяхъ.

Расположимъ сперва большія буквы. Въ верхнемъ ряду расположимъ ихъ по порядку и затѣмъ наполнимъ діагональ, которая спускается слѣва направо, что можетъ быть сдѣлано двоякимъ образомъ, помѣщая A, C, D B, или A, D, B, C. Принимая первый способъ и продолжая наполнять квадратъ, получимъ:

A	B	C	D
D	C	B	A
B	A	D	C
C	D	A	B

Чтобы размѣстить маленькія буквы, мы помѣстимъ ихъ сначала рядомъ съ большими по діагонали A, C, D, B, которая превратится такимъ образомъ въ A*a*, C*c*, D*d*, B*b*; затѣмъ, беря по двѣ клѣтки равно отстоящія отъ этой діагонали, и помѣщенныя параллельно другой діагонали, нужно въ каждой изъ нихъ рядомъ съ большой буквой написать маленькую, соотвѣтствующую большой, помѣщенной въ противоположной клѣткѣ. Напримѣръ, для клѣтокъ D и B, мы получимъ B*d* и D*b*, и т. д. Такимъ образомъ составится квадратъ:

A*a*	B*d*	C*b*	D*c*
D*b*	C*c*	B*a*	A*d*
B*c*	A*b*	D*d*	C*a*
C*d*	D*a*	A*c*	B*b*

Если теперь A, B, C, D замѣнить тузомъ, королемъ, дамой и валетомъ, а *a*, *b*, *c*, *d* четырьмя мастями, въ какомъ угодно порядкѣ, только бы одна и та же буква имѣла одно значеніе во всемъ квадратѣ, то задача наша будетъ рѣшена.

Напримѣръ, если мы дадимъ названія буквамъ въ только-что приведенномъ порядкѣ, то получимъ слѣдующій квадратъ:

ТУЗЪ червей	КОРОЛЬ трефъ	ДАМА бубенъ	ВАЛЕТЪ пикъ
ВАЛЕТЪ бубенъ	ДАМА пикъ	КОРОЛЬ червей	ТУЗЪ трефъ
КОРОЛЬ пикъ	ТУЗЪ бубенъ	ВАЛЕТЪ трефъ	ДАМА червей
ДАМА трефъ	ВАЛЕТЪ червей	ТУЗЪ пикъ	КОРОЛЬ бубенъ

Можно замѣщать A, B, C, D, тузомъ, королемъ, дамой и валетомъ 24-мя различными способами; точно также имѣется 24 способа замѣщенія маленькихъ буквъ; поэтому квадратъ буквъ даетъ 24×24 или 576 рѣшеній.

ЗАДАЧА XII.

Одно лицо беретъ 27 картъ и раскладываетъ ихъ по одной въ 3 кучки изъ 9-ти картъ каждая. (Карты въ рукахъ обращены лицомъ къ низу, а на столъ кладутся открытыми). Во время этого раскладыванія другое лицо замѣчаетъ одну карту въ одной изъ кучекъ; эту карту мы будемъ называть задуманной картой. Затѣмъ первое лицо собираетъ карты, узнавъ предварительно въ какой кучкѣ лежитъ задуманная карта. Снова карты раскладываются на три кучки, узнается въ которой изъ нихъ задуманная карта, и опять собираютъ ихъ, не измѣняя порядка, въ которомъ лежатъ карты въ каждой кучкѣ. Наконецъ, такимъ же образомъ раскладываются карты въ третій разъ, и такимъ же образомъ собираются, послѣ того какъ сдѣлалось извѣстнымъ, въ которой кучкѣ задуманная карта. Спрашивается, какъ должно лицо помѣщать каждый разъ кучку, содержащую задуманную карту, чтобы послѣдняя въ концѣ игры занимала въ колодѣ опредѣленное мѣсто?

Обозначимъ черезъ a, b, c, ряды, въ которые послѣдовательно помѣщается кучка, содержащая задуманную карту. Сначала приходится распредѣлить $a-1$ кучекъ по 9 картъ и уже потомъ кучку содержащую задуманную

карту; эти кучки принесутъ въ каждую новую по $3(a-1)$ картъ, кучка съ задуманной картой даетъ по 3 карты въ каждую новую кучку. Такимъ образомъ въ новой кучкѣ, въ которой будетъ теперь задуманная карта, она будетъ находиться въ числѣ 3-хъ послѣднихъ (картъ) изъ всѣхъ $3(a-1)+3$ картъ.

Затѣмъ эту кучку помѣщаютъ такъ, что ей предшествуютъ $b-1$ другихъ кучекъ, тогда сначала придется распредѣлить $9(b-1)+3(a-1)+3$ картъ; изъ нихъ въ каждую кучку войдетъ по $3(b-1)+(a-1)+1$, и задуманная карта въ своей кучкѣ будетъ лежать послѣднею. Затѣмъ помѣщаютъ передъ кучкой съ задуманной картой $c-1$ кучекъ и тогда для ряда R задуманной карты въ колодѣ получимъ:

$$9(c-1)+3(b-1)+(a-1)+3.$$

Такимъ образомъ мы имѣемъ формулу:

$$R=9(c-1)+3(b-1)+a.$$

По этой формулѣ легко найти R, когда извѣстны a, b и c. Зная R, можно найти a, b, c, на основаніи слѣдующаго правила:

Раздѣлите назначенный рядъ R послѣдовательно два раза на 3 такимъ образомъ, чтобы только отъ перваго дѣленія въ остаткѣ не получился нуль; полученный остатокъ a укажетъ въ какомъ ряду надо помѣстить въ первый разъ кучку съ задуманной картой. Затѣмъ второй остатокъ, увеличенный на 1, укажетъ въ какомъ ряду надо помѣстить кучку съ задуманной картой во второй разъ, и наконецъ, второе частное, увеличенное на 1, укажетъ какъ помѣстить эту же кучку въ третій разъ.

Примѣръ 1.—Если желаютъ, чтобы задуманная карта вышла одиннадцатою:

11	3	
2	3	3
	0	1

Нужно будетъ первый разъ помѣстить кучку съ задуманной картой во второмъ ряду, второй разъ въ первомъ, и въ третій разъ во второмъ.

Примѣръ 2.—Если хотятъ, чтобы задуманная карта вышла девятою:

9	3	
3	2	3
	2	0

Нужно будетъ въ первый разъ помѣстить кучку съ задуманною картою въ третьемъ ряду, во второй разъ также въ третьемъ, и въ третій разъ въ первомъ.

Примѣчаніе.—Когда этотъ фокусъ повторяется нѣсколько разъ сряду, не мѣшаетъ нѣсколько его разнообразить. Напримѣръ можно первый разъ отыскивать задуманную карту, держа колоду за спиною. Другой разъ можно впередъ объявить рядъ, въ которомъ будетъ въ колодѣ задуманная карта, или можно предложить кому нибудь назначить рядъ, въ которомъ задуманная карта должна очутиться въ концѣ игры. Наконецъ можно поручить собирать кучки картъ другому лицу, замѣчая только каждый разъ, въ которомъ ряду кладется кучка съ задуманною картою; тогда задуманная карта легко найдется при помощи выведенной нами выше формулы.

ЗАДАЧА XIII.

Рѣшить предъидущую задачу съ 48 картами, которыя раскладываются три раза на 4 кучки.

Пусть a будетъ тотъ рядъ, въ которомъ помѣщается въ первый разъ кучка съ задуманной картой, b рядъ, въ которомъ помѣщается во второй разъ, и c въ которомъ она помѣщается въ третій разъ.

Когда мы помѣстимъ кучку съ задуманной картой въ рядъ b, то этому ряду будетъ предшествовать 12 $(b-1)$ картъ, которыя затѣмъ распредѣлятся по четыремъ кучкамъ по 3 $(b-1)$ картъ въ каждую. Тогда задуманная карта въ своей кучкѣ будетъ лежать вслѣдъ за этими 3 $(b-1)$ картами и, если мы назовемъ рядъ, въ которомъ она лежитъ послѣ этихъ картъ черезъ r, то найдемъ, что рядъ задуманной карты будетъ $3(b-1)+r$. Снова собирая карты, мы помѣщаемъ $c-1$ кучекъ передъ той, которая заключаетъ задуманную карту; поэтому, обозначивъ черезъ R рядъ, который тогда занимаетъ въ колодѣ задуманная карта, получимъ:

$$R=12(c-1)+3(b-1)+r.$$

Теперь остается посмотрѣть, отъ чего зависитъ величина r. Когда мы первый разъ собрали кучки, то передъ кучкой съ задуманною картой помѣстили $12(a-1)$ картъ. Затѣмъ, распредѣляя карты вторично, мы сперва положили въ каждую кучку по $3\ (a-1)$ картъ, потомъ по 3 карты изъ кучки, въ которой находилась задуманная карта. При слѣдующемъ распредѣленіи эти $3\ (a-1)+3$ карты размѣстились по четыремъ кучкамъ за тѣми $3\ (b-1)$ картами, которыя были помѣщены впереди въ каждой кучкѣ; отъ этого распредѣленія и зависитъ рядъ r. Поэтому, если $a=1$, придется разложить только три карты изъ тѣхъ, между которыми находится задуманная, и она будетъ слѣдовательно въ первомъ ряду послѣ $3\ (b-1)$ картъ. Мы получимъ

$$R=12\ (c-1)+3\ (b-1)+1. \qquad (1)$$

Если $a=4$, величина $3\ (a-1)+3$ становится равною 12; распредѣляя эти 12 картъ, въ каждую кучку придется по 3, и, такъ какъ задуманная карта находится среди трехъ послѣднихъ, то она очутится третьею послѣ $3\ (b-1)$ картъ, какъ можно видѣть изъ слѣдующей таблички, гдѣ x обозначаетъ мѣсто задуманной карты:

1-я кучка.	2-я кучка.	3-я кучка.	4-я кучка.
c,	c,	c,	c,
c,	c,	c,	c,
c,	x,	x,	x,

Такъ что въ этомъ случаѣ:

$$R=12\ (c-1)+3\ (b-1)+3. \qquad (2)$$

Если $a=3$, величина $3\ (a-1)+3$ сдѣлается равною 9-ти, и эти 9 картъ распредѣлятся вслѣдъ за $3\ (b-1)$ картами, которыя уже размѣщены слѣдующимъ образомъ:

1-я кучка.	2-я кучка.	3-я кучка.	4-я кучка.
c,	c,	c,	c,
c,	c,	x,	x,
x,			

Поэтому, если задуманная карта лежитъ не въ первой кучкѣ, то она будетъ въ своей кучкѣ второю послѣ $3\ (b-1)$ первыхъ картъ, и мы получимъ:

$$R=12\ (c-1)+3\ (b-1)+2 \qquad (3)$$

Но, если задуманная карта будетъ лежать въ первой кучкѣ, то

$$R=12\ (c-1)+3\ (b-1)+3 \qquad (4)$$

Когда подобный случай представится, достаточно, собравъ кучки, переложить внизъ колоды одну изъ верхнихъ картъ, чтобы вмѣсто уравненія (4) получилось уравненіе (3).

Такимъ образомъ задача разрѣшается при помощи уравненій (1), (2), (3); и отсюда мы выведемъ слѣдующее правило:

Раздѣлить назначенный рядъ R послѣдовательно на 3 и 4, но такъ, чтобы первое дѣленіе не дало въ остаткѣ нуля; и, если этотъ остатокъ будетъ 1, то надо первый разъ кучку съ задуманной картой положить на верху колоды; если этотъ остатокъ будетъ 3, нужно помѣстить ее внизу колоды, и, наконецъ, если этотъ остатокъ будетъ 2, нужно помѣстить ее въ третьемъ ряду. Второй остатокъ, увеличенный на единицу, укажетъ рядъ, въ которомъ должно помѣстить кучку съ задуманной картой во второй разъ, а второе частное,

увеличенное на 1, укажетъ рядъ, въ которомъ должно помѣстить эту кучку, собирая карты въ третій разъ. Но, если въ первый разъ кучка съ задуманной картой была помѣщена третьею, и въ третій разъ эта карта попадетъ въ первую изъ четырехъ кучекъ, нужно будетъ, собравъ ихъ, переложить одну карту сверху внизъ колоды.

Примѣръ 1. — Если хотятъ, чтобы задуманная карта вышла 37-ой.

37 | 3
1 | 12 | 4
0 | 3

Первый разъ кучку задуманной карты надо положить первою, во второй разъ первою, и въ третій разъ четвертою.

Примѣръ 2. — Если хотятъ, чтобы задуманная карта вышла 20-й.

20 | 3
2 | 6 | 4
2 | 1

Въ первый разъ кучку съ задуманной картой надо положить второй, во второй разъ третьей, и въ третій разъ второю.

Примѣръ 3. — Если хотятъ, чтобы задуманная карта вышла 24-й.

24 | 3
3 | 7 | 4
3 | 1

Въ первый разъ кучку съ задуманной картой помѣщаютъ въ третьемъ ряду, во второй разъ въ четвертомъ, и въ третій разъ во второмъ.

ЗАДАЧА XIV.

Расположить карты пикетной колоды въ четырехъ рядахъ въ такомъ порядкѣ, чтобы послѣ извѣстной перекладки картъ, имѣть возможность всегда сразу отыскивать каждую изъ нихъ.

Чтобы объяснить эту задачу, мы будемъ называть меньшія карты по числу очковъ 7, 8, 9, 10, затѣмъ старшія будутъ: валетъ 11, дама 12, король 13 и тузъ 14.

Сперва помѣщаютъ открытыми четыре семерки въ одну колонку, и затѣмъ справа отъ каждой семерки раскладываются остальныя карты той же масти, въ слѣдующемъ порядкѣ:

7, 14, 13, 12, 11, 10, 9, 8, въ первомъ ряду;
7, 13, 12, 11, 10, 9, 8, 14, во второмъ ряду;
7, 12, 11, 10, 9, 8, 14, 13, въ третьемъ ряду;
7, 11, 10, 9, 8, 14, 13, 12, въ четвертомъ ряду.

Затѣмъ собираютъ карты по колоннамъ, начиная съ лѣвой и оставляя на столѣ четыре семерки. Въ первой колоннѣ 14 кладутъ на 13, эти двѣ карты на 12, и эти три на 11; потомъ эти четыре карты кладутъ на

13 второй колонны, эти пять на 12 той же колонны, эти шесть картъ на 11, эти на 10, и затѣмъ по прежнему переходятъ къ третьей колоннѣ и къ слѣдующимъ, пока не будутъ собраны всѣ 28 картъ.

Послѣ этого карты переворачиваютъ, и, начиная съ верхней, кладутъ первыя семь рядомъ съ первой семеркой, слѣдующія 7 рядомъ со второй семеркой, и такъ далѣе для третьей и четвертой семерки.

Теперь задача заключается въ томъ, чтобы между этими 28-ми закрытыми картами указать всякую, какую-бы кто ни пожелалъ.

Посмотримъ сначала, что сталось съ картами, которыя были первоначально въ первомъ ряду.

Имѣя въ виду способъ, какимъ мы собирали карты и обращая вниманіе на то, что затѣмъ колода была перевернута, легко видѣть, что карты перваго ряда будутъ въ колодѣ лежать въ естественномъ порядкѣ:

8, 9, 10, валетъ, дама, король, тузъ,

и, что они занимаютъ въ колодѣ ряды:

4, 8, 12, 16, 20, 24, 28.

Поэтому, если кто нибудь попроситъ указать одну изъ этихъ картъ, даму, напримѣръ, надо, считая пятую карту, и начавъ счетъ съ четвертой, съ конца послѣдней колонны, называть послѣдовательно 8, 9, 10, валетъ, дама и карта, на которую придется слово дама, будетъ требуемая карта. (Мы принимаемъ, что колонны, какъ бы составляютъ непрерывный рядъ картъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ онѣ были разложены.)

Что же касается картъ, которыя первоначально были во второмъ ряду, то легко видѣть точно также, что первыя:

8, 9, 10, валетъ, дама, король,

лежатъ въ этомъ порядкѣ въ колодѣ по одной черезъ каждыя четыре карты, причемъ первая изъ нихъ занимаетъ въ колодѣ 7-ой рядъ. Итакъ карты эти въ колодѣ будутъ занимать ряды:

7, 11, 15, 19, 23, 27.

Что касается туза, онъ занимаетъ 3-й рядъ, но это все равно что сказать, что онъ занимаетъ 31-й рядъ, если послѣ 27 продолжать считать черезъ 4 карты, начавъ послѣ 28-й опять съ перваго ряда. Такимъ образомъ карты, первоначально лежавшія во второмъ ряду, будутъ лежать въ естественномъ порядкѣ, и мы найдемъ ихъ, считая съ 7-й черезъ четыре пятую и переходя отъ конца одного ряда къ началу слѣдующаго и отъ послѣдней карты, нижняго ряда къ первой верхняго, если и придется считать сверхъ 28-ми картъ.

Точно также мы найдемъ, что карты, занимавшія первоначально третій и четвертый рядъ, будутъ лежать въ порядкѣ черезъ четыре карты, начиная съ 10-й для третьяго и съ 13-й для четвертаго ряда.

Четыре семерки, которыя остаются открытыми во время всей игры, служатъ для напоминанія о мастяхъ картъ, первоначально лежавшихъ въ каждомъ ряду.

Вообще, если обозначимъ черезъ n число очковъ карты, которая первоначально была въ ряду r, ея рядъ R получится изъ формулы:

$$R = 4(n - 7) + 3(r - 1).$$

Наоборотъ, если данъ рядъ R, можно узнать карту. Если R кратное отъ 4, получимъ:

$$R = 4(n - 7), \text{ откуда } n = \frac{R}{4} + 7,$$

и это будетъ одна изъ картъ, которыя первоначально лежали въ первомъ ряду.

Если R кратное 4-хъ +3, имѣемъ

$$R = 4(n - 7) + 3, \text{ откуда } n = \frac{R-3}{4} + 7,$$

и это будетъ одна изъ картъ, которыя первоначально лежали во второмъ ряду.

Затѣмъ $\frac{R-6}{4}+7$ и $\frac{R-9}{4}+7$ укажутъ карты, первоначально находившіяся въ третьемъ и четвертомъ рядахъ.

Когда для R найдено будетъ одно изъ чиселъ 1, 2, 3, 5, 6, 9, нужно прибавить къ нему 28, прежде чѣмъ начать счисленіе.

ЗАДАЧА XV.

Кто нибудь, выбравъ карту, положилъ ее обратно въ колоду; предложить сдѣлать такъ, что послѣ нѣсколькихъ перетасовокъ, задуманная карта очутится въ желаемомъ ряду.

Есть нѣсколько способовъ рѣшенія этой задачи, но во всѣхъ карты тасуются одинаковымъ образомъ, и въ этомъ-то тасованіи и заключается весь секретъ задачи; тѣмъ не менѣе нужно указать участвующимъ этотъ способъ тасованія, какъ бы наилучшій, такъ какъ и на самомъ дѣлѣ карты при этомъ тасуются такъ, что каждыя двѣ карты, прежде лежавшія рядомъ, впослѣдствіи разъединяются.

Тасованіе это состоитъ въ томъ, что вторую карту кладутъ на первую, третью снизу этихъ двухъ, четвертую сверху, пятую снизу и т. д. до послѣдней.

Для удобства дальнѣйшихъ объясненій, мы представимъ эти различныя тасовки, помѣщая карты въ одной линіи, какъ напримѣръ ниже для 12-ти картъ.

Первое размѣщеніе.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Первая тасовка.

12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, 12.

Вторая тасовка.

11, 7, 3, 2, 6, 10, 12, 8, 4, 1, 5, 9.

Третья тасовка.

9, 1, 8, 10, 2, 7, 11, 3, 6, 12, 4, 5.

И такъ далѣе.

Подобнаго рода тасованіе имѣетъ много особенностей, которыя могутъ служить основаніемъ для различныхъ рѣшеній этой задачи.

Самое простое состоитъ въ томъ, что, если мы возьмемъ нечетное число картъ, послѣдняя не перемѣнитъ мѣста, что мы можемъ прослѣдить въ слѣдующихъ 9 картахъ:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9.

Поэтому, если дать положить выбранную кѣмъ нибудь карту подъ колоду, можно быть увѣреннымъ, что она всегда останется послѣднею, сколько бы разъ мы ни перетасовывали колоду такимъ образомъ. Такъ что мы можемъ всегда, переложивъ извѣстное количество картъ сверху колоды внизъ, сдѣлать такъ, чтобы выбранная карта очутилась въ ряду, назначенномъ заранѣе.

Если m число картъ и r назначенный рядъ карты, надо переложить подъ колоду $m-r$ картъ.

Другія карты размѣщаются независимо отъ послѣдней, когда число картъ нечетное, поэтому далѣе мы будемъ всегда предполагать, что имѣемъ дѣло съ четнымъ числомъ картъ.

Посмотримъ сначала въ какомъ порядкѣ первоначальныя карты лягутъ по колоннамъ при послѣдовательныхъ раскладкахъ:

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12;
12,	10,	8,	6,	4,	2,	1,	3,	5,	7,	9,	11;
11,	7,	3,	2,	6,	10,	12,	8,	4,	1,	5,	9;
9,	1,	8,	10,	2,	7,	11,	3,	6,	12,	4,	5;
5,	12,	3,	7,	10,	1,	9,	8,	2,	11,	6,	4;
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.

При первомъ тасованіи, карты нечетныхъ рядовъ размѣщаются съ правой стороны, а карты четныхъ рядовъ съ лѣвой; такъ что, обозначая черезъ $2n$ число всѣхъ картъ въ игрѣ, мы найдемъ, что подъ картами:

$$1, \quad 2, \ldots (n-1), \; n, \; (n+1), \; (n+2), \; (n+3), \ldots 2n,$$

будутъ лежать карты:

$$2n, \; 2(n-1), \ldots 4, \quad 2, \quad 1, \quad 3, \quad 5 \ldots (2n-1);$$

вообще подъ картой $n+k$ первоначальной раскладки, будетъ лежать карта $1+2(k-1)$ или $2k-1$ второй раскладки; и подъ $n-k$ первой раскладки будетъ лежать карта $2+2k$ или $2(k+1)$ второй раскладки. Если $k=0$, вторая карта будетъ 2.

Съ другой стороны, двѣ карты, которыя занимаютъ тотъ же рядъ въ двухъ ближайшихъ раскладкахъ, будутъ въ слѣдующихъ двухъ сосѣднихъ раскладкахъ въ томъ же порядкѣ занимать одинаковый рядъ. Напримѣръ, карта 10 и карта 7 находятся въ десятомъ ряду въ первыхъ двухъ распредѣленіяхъ, во 2-омъ ряду —во 2-омъ и 3-емъ разпределеніяхъ и въ 6-омъ ряду въ 3-емъ и 4-омъ распредѣленіи и т. д. Дѣйствительно, если карта 10 перваго распредѣленія попала во 2-ой рядъ втораго

распредѣленія, карта 7 этого послѣдняго ряда должна попасть во второй рядъ третьяго распредѣленія и т. д. Отсюда можно заключить:

1) Одна и та же карта не можетъ иначе повториться въ одномъ и томъ же ряду въ двухъ послѣдовательныхъ распредѣленіяхъ, какъ только если она повторялась такъ съ самаго начала; потому что, если b находится подъ a во второмъ распредѣленіи, она будетъ также находиться подъ a и въ третьемъ распредѣленіи, и въ четвертомъ и т. д.; слѣдовательно b никогда не можетъ очутиться подъ b.

2) Если нѣсколько картъ повторяются періодически въ одномъ и томъже ряду это повтореніе начинается съ карты a, которая занимаетъ этотъ рядъ въ первомъ распредѣленіи. Потому что, если b, c, d, суть карты, послѣдовательно лежащія подъ этой картой a, то, такъ какъ всѣ эти карты какъ бы связаны съ предшествующими имъ верхними картами, d повторяется только, если повторяется c, c должна была предшествовать b, и b предшествовала карта a. Слѣдовательно періодичное повтореніе ихъ начинается съ первой карты.

Изъ этихъ объясненій видно, что одна и та же карта можетъ повториться въ томъ же ряду во всѣхъ распредѣленіяхъ: это вторая особенность подобнаго тасованія картъ. Если мы имѣемъ карту, первоначальный рядъ которой $n-k$, то такъ какъ карта, лежащая подъ этой, должна быть $2(k+1)$, нужно чтобы получилось уравненіе

$$n - k = 2\,(k + 1),$$

откуда выводимъ $k=\frac{n-2}{3}$, и это уравненіе требуетъ, чтобы $n-2$ было кратное число отъ 3-хъ.

Пусть $n-2=12$, откуда $n=14$, мы найдемъ, что $k=4$ и $n-k=10$, т. е. если мы употребимъ для этого фокуса 28 картъ, десятая изъ нихъ во всѣхъ распредѣленіяхъ будетъ занимать одинъ и тотъ же рядъ. Поэтому, если будетъ извѣстно, что выбранная кѣмъ нибудь карта была помѣщена въ десятомъ ряду, она будетъ всегда оставаться въ этомъ ряду и затѣмъ всегда можно сдѣлать, чтобы она вышла какою угодно по счету, стоитъ только для этого положить извѣстное количество картъ сверхъ колоды или подъ нее.

Если-бы взять 22 карты, то окажется, что 8-я карта всегда будетъ занимать 8-й рядъ.

Подобною особенностью всегда пользуется только одна карта, если только число всѣхъ картъ въ колодѣ не будетъ нечетное.

Третья особенность тасованія состоитъ въ томъ, что двѣ или нѣсколько картъ могутъ повторяться въ тѣхъ-же рядахъ въ различныхъ распредѣленіяхъ.

Пусть, напримѣръ, такими картами будутъ $n-k$ и $n+l$ перваго распредѣленія.

Мы знаемъ, что подъ $n-k$ перваго распредѣленія во второмъ распредѣленіи будетъ $2\,(k+1)$, и что подъ $n+l$ во второмъ распредѣленіи будетъ $2l-1$; поэтому для картъ $n-k$ и $n+l$, которыя постоянно повторяются въ той-же колоннѣ, должны получиться уравненія:

$$2\,(k + 1) = n + l \text{ и } 2\,l - 1 = n - k.$$

Изъ этихъ уравненій выводится

$$k = \frac{3(n-1)}{5} \text{ и } l = \frac{n+4}{5}.$$

Легко видѣть, что нужно только, чтобы $n-1$ было кратное число отъ 5-ти. Если, напримѣръ, $n-1=10$,

получимъ $n=11$, $k=6$, $l=3$, $n-k=5$, $n+l=14$; т. е. всего будетъ 22 карты, 5-ая и 14-я будутъ послѣдовательно повторяться въ пятыхъ рядахъ каждаго распредѣленія, и въ обратномъ порядкѣ (14, 5, 14, 5...) въ 14 ряду.

При 32-хъ картахъ найдемъ, что повторяться будутъ 7-ая и 20-ая карты.

Если поэтому выбранная карта будетъ помѣщена въ одномъ изъ этихъ рядовъ, можно всегда знать мѣсто, въ которомъ она будетъ находиться послѣ нѣсколькихъ тасовокъ, а потому всегда можно сдѣлать, чтобы она въ колодѣ заняла опредѣленное мѣсто.

Можно продолжать эти разслѣдованія и для большаго числа картъ, такъ мы нашли бы, что при 22 картахъ въ одной колоннѣ повторяются три: 3, 18 и 13, и въ другой четыре карты: 2, 20, 17, 11; но намъ кажется, что для того, чтобы сдѣлать эту игру интересною, достаточно того, что мы уже сказали.

Четвертая особенность тасованія заключается въ томъ, что послѣ извѣстнаго числа перетасовокъ, но не болѣе числа всѣхъ картъ, всѣ карты лягутъ въ первоначальномъ порядкѣ.

Предположимъ, что первоначальное расположеніе и послѣдующія перетасовки написаны одна подъ другой, какъ въ предыдущемъ примѣрѣ съ 12 картами. Въ первой вертикальной колоннѣ слѣва мы найдемъ карты:

$$1,$$
$$2n,$$
$$2n-1,$$
$$2n-3,$$
$$2n-7, \text{ и т. д.}$$

и всѣ эти карты суть тѣ, которыя въ предыдущемъ распредѣленіи занимали послѣдній рядъ. Такъ какъ

послѣ карты 1, мы имѣемъ въ распоряженіи только $2n-1$ картъ, то послѣ $2n$ тасовокъ хоть одна изъ этихъ картъ должна необходимо быть два раза въ этой первой колоннѣ. Такимъ образомъ получится нѣкоторыя періодичность чиселъ, но мы знаемъ, что періодическое повтореніе чиселъ начинается всегда съ первой карты всякой колонны, поэтому въ нашей колоннѣ снова получится 1-ая карта. Если это повтореніе произошло послѣ $2n$ тасовки, то то же произойдетъ въ каждой колоннѣ, потому-что всѣ карты первой колонны, повторяясь черезъ $2n$ картъ, вслѣдствіе зависимости между картами, на которую мы указали выше, одновременно произведутъ повторенія соотвѣтствующихъ картъ въ другихъ колоннахъ. Такимъ образомъ первоначальный порядокъ возстановится послѣ $2n$ тасованій, какъ мы видимъ это, напримѣръ, при 14-ти картахъ.

Если въ отдѣльныхъ колоннахъ имѣются особенные періоды, неодинаковые съ періодомъ первой колонны, то они всегда заключаютъ менѣе $2n$ картъ; но во всякомъ случаѣ эти меньшіе періоды чиселъ повторяются полное число разъ въ теченіе одного періода первой колонны. Такъ, напримѣръ, при 22 картахъ получаются четыре періода по 1, 2, 3, и 4 карты, такъ что для первой колонны остаются 12 картъ; поэтому, когда въ послѣдней вернется карта 1, эти четыре періода начнутся снова и всѣ карты придутъ въ первоначальный порядокъ

Поэтому достаточно вычислить, когда вернется карта 1 въ первой колоннѣ, чтобы знать, сколько разъ надо перетасовать указаннымъ образомъ карты, чтобы возстановить ихъ первоначальный порядокъ. Это можетъ быть сдѣлано при помощи формулъ.

$2(k+1)$ слѣдующей за $n-k$,
и $2k-1$ слѣдующей за $n+k$.

Положимъ, напримѣръ, что надо узнать, сколько необходимо тасовокъ, чтобы привести въ первоначальный порядокъ 32 карты.

Получимъ:	$32=16+16$;	$2.16-1=31$;
	$31=16+15$;	$2.15-1=29$;
	$29=16+13$;	$2.13-1=25$;
	$25=16+9$;	$2.9-1=17$;
	$17=16+1$;	$2.1-1=1$;

и слѣдовательно необходимо 6 тасовокъ.

Возьмемъ еще примѣръ для 28 картъ;

Имѣемъ	$28=14+14$;	$2.14-1=27$;
	$27=14+13$;	$2.13-1=25$;
	$25=14+11$;	$2.11-1=21$;
	$21=14+7$:	$2.7-1=13$;
	$13=14-1$;	$2(1+1)=4$;
	$4=14-10$;	$2(10+1)=22$;
	$22=14+8$;	$2.8-1=15$;
	$15=14+1$;	$2.1-1=1$;

слѣдовательно необходимо 9 тасовокъ.

Можно также разрѣшить этотъ вопросъ безъ подобныхъ вычисленій при помощи двухъ первыхъ распредѣленій. Возьмемъ 12 картъ:

Первое расположеніе.

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Первое тасованіе.

12, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 3, 5, 7, 9, 11.

Подъ 12-ью находится 11; подъ 11-ью 9; подъ 9-ью 5; подъ 5-ью, 4; подъ 4-мя 6; подъ 6-ью 2; подъ 2-мя 10; подъ 10-ью 7; и подъ 7-ью 1. Такимъ образомъ мы перечислили 10 чиселъ, переходя отъ 12 къ 1, и отсюда заключаемъ, что необходимо 10 тасовокъ.

По этимъ указаніямъ задача рѣшается такимъ образомъ. Выбранную кѣмъ нибудь карту изъ колоды, напримѣръ, въ 32 карты, предлагаютъ положить обратно въ колоду, и быстро сосчитываютъ рядъ, въ которомъ она лежитъ (что можетъ быть сдѣлано различными способами, по усмотрѣнію каждаго). Впрочемъ, если не удастся сдѣлать эту подготовку, можно отдать колоду въ руки лицу выбиравшему карту и попросить его сосчитать рядъ карты и запомнить его.

Затѣмъ назначаютъ рядъ, въ который должны войти карты, и дѣлаютъ 6 тасовокъ. Если нельзя было узнать рядъ карты, нужно спросить его послѣ 2-хъ или 3-хъ перетасовокъ; потомъ, послѣ шестой тасовки, перекладываютъ необходимое число картъ для того, чтобы выбранная очутилась въ назначенномъ ряду.

Если кому нибудь покажется слишкомъ долго сдѣлать 6 тасовокъ съ 32 картами, можно взять только 16, и тасовать карты только 5 разъ; при этомъ надо еще замѣтить, что 6-ая карта будетъ постоянно оставаться въ шестомъ ряду.

ПРИМѢЧАНІЯ.

ПРИМѢЧАНІЕ I.

ОБЪ ОБЩИХЪ КРАТНЫХЪ ЧИСЛАХЪ.

1. *Общее наименьшее кратное число двухъ чиселъ* A *и* B *равняется ихъ произведенію, раздѣленному на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя* D, *т. е.* $\frac{AB}{D}$.

Пусть A' и B' будетъ частныя отъ дѣленія A и B на ихъ общаго наибольшаго дѣлителя D. Какое нибудь кратное отъ A, напримѣръ, $mA = mA'D$; и, чтобы оно было также кратнымъ отъ B или $B'D$, необходимо, чтобы оно дѣлилось послѣдовательно на D и B', т. е, чтобы mA' дѣлилось на B'. Но, такъ какъ A' и B' суть числа первыя между собою, нужно чтобы m дѣлилось на B; и этого условія вполнѣ достаточно. Если теперь n будетъ частное отъ дѣленія m на B', общія кратныя числа двухъ чиселъ A и B всѣ будутъ заключаться въ формулѣ

$$nA'B'D;$$

а наименьшее будетъ поэтому $A'B'D$, т. е. $A'B$ или AB' или $\frac{AB}{D}$.

Прочія будутъ кратныя отъ этого наименьшаго общаго кратнаго числа.

Если имѣются три числа A, B, C, нужно взять общаго наибольшаго дѣлителя D' для AB' и C, и, обозначивъ черезъ C', частно $\frac{C'}{D}$ получимъ, что для A, B, C, наименьшее общее кратное число будетъ $AB'C$.

Такимъ же образомъ найдутся общія наименьшія кратныя числа для четырехъ, пяти и болѣе чиселъ.

Общее наименьшее кратное чиселъ первыхъ между собою, равняется произведенію этихъ чиселъ.

2. *Даны два числа A и B, первыя между собою; если послѣдовательно дѣлить на C всѣ кратныя отъ A, меньшія ихъ произведенія (AB),*

$$A,\ 2A,\ 3A, \ldots\ (B-1)\ A,$$

то получатся все различные остатки.

Прежде всего мы видимъ, что ни одно изъ этихъ кратныхъ не дѣлится на-цѣло на B, потому-что если B и A числа первыя между собою, mA только тогда и раздѣлится на B, когда m раздѣлится на-цѣло на B что невозможно для нашихъ кратныхъ чиселъ, гдѣ m всегда менѣе B. Кромѣ того два изъ этихъ чиселъ при дѣленіи на B не могутъ дать одного и того же остатка, потому что тогда ихъ разность должна дѣлиться на B, а тогда слѣдовательно въ приведенномъ нами ряду кратныхъ отъ A будетъ одно дѣлящееся на B, что мы только-что, признали невозможнымъ.

Отсюда слѣдуетъ, что, дѣля на B всѣ эти B—1 кратныхъ отъ A, мы получимъ въ какомъ бы то ни было порядкѣ всѣ числа отъ 1 до B—1. Это объясняется еще и тѣмъ, что всегда можно отыскать какое нибудь число кратное отъ A, но меньшее AB, которое превышаетъ какое нибудь кратное отъ B, на какое нибудь число R, меньшее B, и это число для даннаго случая будетъ единственное.

3. Произведеніе BA будетъ первое кратное отъ A, которое дѣлится на B; а слѣдующія

$$(B+1)\ A,\ (B+2)\ A,\ (B+3)\ A, \ldots\ (2B-1)A.$$

при дѣленіи на B дадутъ тѣ же остатки, какъ и

$$A, \quad 2A, \quad 3A, \ldots\ (B-1)\ A;$$

точно также найдемъ, что остатки повторяются въ томъ же порядкѣ и между числами отъ 2B A до 3BA. потомъ между 3 B A и 4BA и т. д.

4. Если бы два числа A и B не были первыми между собою, мы не иначе удовлетворили-бы уравненію $\dot{A} = \dot{B} + R$, какъ при условіи, чтобы R дѣлилось на общаго наибольшаго дѣлителя A и B; потому что если два числа дѣлятся на какое нибудь третье число, то и кратныя отъ этихъ чиселъ дѣлятся на это число, а также и разности между ними. Поэтому, если мы будемъ дѣлить на B различныя кратныя отъ A, не превышающія однако ихъ общаго наименьшаго кратнаго числа $B'A$,

$$A,\ 2A,\ 3A, \ldots\ (B'-1)\ A,$$

то получимъ въ нѣкоторомъ порядкѣ различныя кратныя отъ ихъ наибольшаго общаго дѣлителя D, до $(B'-1)D$, и всѣ эти остатки повторяются въ томъ же порядкѣ и при кратныхъ отъ A, большихъ $B'A$.

5. *Если мы будемъ дѣлить на нѣсколько чиселъ каждое изъ чиселъ, не превышающихъ ихъ общаго наименьшаго кратнаго числа, то системы всѣхъ остатковъ будутъ различны между собою.*

Пусть M будетъ общее наименьшее кратное число

нѣсколькихъ чиселъ A, B, C. Возьмемъ два числа H и G, меньшія M; если мы раздѣлимъ числа G и H на A, на B и на C, то найдемъ, что не всѣ остатки, отъ дѣлимаго G будутъ равны соотвѣтствующимъ остаткамъ H.

Потому-что, если бы мы получили

$$G = \dot{A} + a, \qquad H = \dot{A} + a,$$
$$G = \dot{B} + b, \qquad H = \dot{B} + b,$$
$$G = \dot{C} + c, \qquad H = \dot{C} + c,$$

то

$$G - H = \dot{A}, \quad G - H = \dot{B}, \quad G - H = \dot{C},$$

т. е. что G—H, число меньшее M, было бы общее кратное отъ A, B и C, что противорѣчитъ нашему предположенію, что M наименьшее кратное число A, B и C.

ПРИМѢЧАНІЕ II.

Даны два числа A и B, найти наименьшее кратное число одного, которое превышало бы на какое нибудь число R какое нибудь кратное другаго.

Прежде чѣмъ приступить къ разрѣшенію этой теоремы, мы должны сдѣлать слѣдующія два важныя замѣчанія.

Во первыхъ, если задача будетъ разрѣшена для

$$mA = nB + R,$$

она разрѣшится и для

$$m'B = n'A + R,$$

если мы вычтемъ nB и mA изъ общаго наименьшаго кратнаго числа A и B; потому что, такъ какъ это наименьшее кратное будетъ $B'A$ или $A'B$, а mA по предположенію менѣе $B'A$, то первое уравненіе

дастъ $$B'A - mA = A'B - nB - R,$$
или $$(A' - n)B = (B' - m)A + R.$$

Это уравненіе разрѣшаетъ вопросъ, такъ какъ $(A' - n)B$ менѣе $A'B$.

Второе замѣчаніе заключается въ томъ, что если мы получимъ какимъ бы то ни было способомъ уравненіе

$$mA = nB + R,$$

то, такъ какъ $A'B = B'A$ есть общее наименьшее кратное для чиселъ A и B, можно сейчасъ видѣть, получилось ли простѣйшее рѣшеніе, т. е. то, въ которомъ mA меньше $B'A$. Это сводится къ тому, чтобы узнать, будетъ ли m менѣе B', или n менѣе A'. Если нѣтъ, нужно исключить въ обоихъ случаяхъ наибольшее кратное отъ $B'A$, которое заключается въ обоихъ числахъ mA и nB. Для этого надо m раздѣлить на B' и замѣнить m остаткомъ отъ дѣленія p; тогда получится самое простое рѣшеніе

$$pA = \dot{B} + R.$$

Можно то же самое сдѣлать съ n, раздѣливъ его на A' и замѣнивъ n остаткомъ q, и тогда получится:

$$\dot{A} = qB + R.$$

Вернемся теперь къ главному вопросу. Сдѣлаемъ вычисленіе, посредствомъ котораго отыскиваютъ общаго наибольшаго дѣлителя двухъ чиселъ A и B, и предположимъ, что остатокъ R находится въ числѣ остатковъ, которые получатся при этомъ вычисленіи.

Первое дѣленіе дастъ $A = qB + C$, откуда должно заключить, что

$$mA = mqB + mC.$$

Поэтому, если $mA = \dot{B} \pm R$, то также и $mC = \dot{B} \pm R$, и наоборотъ, и если mC есть первое кратное отъ C, равное $\dot{B} \pm R$, то тоже будетъ и для mA.

Поэтому, если мы возьмемъ три послѣдовательные остатка X, Y, Z, и уже нашли

$$mZ = sY \pm R,$$

то, прибавивъ сюда соотношеніе, которое существуетъ между тремя остатками

$$qY + Z = X,$$

получимъ, какъ это легко видѣть:

$$(mq + s)\, Y = mX \mp R. \qquad (1).$$

Слѣдовательно мы умѣемъ переходить отъ

$$\dot{Z} = \dot{Y} \pm R$$

къ

$$Y = \dot{X} \pm R;$$

а потому, поднимаясь постепенно, найдемъ

$$\dot{A} = \dot{B} \pm R;$$

и, такъ какъ послѣднее дѣленіе дастъ намъ

$$mZ = Y - R,$$

т. е. наименьшее кратное отъ Z, равное $\dot{Y} - R$, то затѣмъ при помощи формулы (1) найдемъ наименьшее кратное отъ Y, равное $\dot{X} + R$, и такъ далѣе до

$$\dot{A} = \dot{B} \pm R.$$

Для наглядности возьмемъ примѣръ съ числами: $A = 6259$, $B = 2773$ и $R = 1$.

A	B	C	D	E	F
	2	3	1	8	39
6259	2773	713	634	79	2
713	634	79	2	19	
				1	

Чтобы облегчить писаніе, обозначимъ послѣдніе дѣлители черезъ C, D, E, F.

Послѣднія два дѣленія дадутъ:

$$39\,F = 1E - 1$$

и $8\,E + F = D$;

поэтому $(39.8+1)E = 39\,D+1$

или $313\,E = 39\,D+1$;

затѣмъ имѣемъ

$$1\,D + E = C,$$

а потому $(313.1+39)\,D = 313\,C - 1$

или $352\,D = 313\,C - 1$;

потомъ $3\,C + D = B$,

откуда $(352.3+313)C = 352\,B+1$

или $1369\,C = 352\,B+1$;

наконецъ $2B + C = A$;

откуда $(1369.2+352)B = 1369\,A - 1$

или $3090\,B = 1369\,A - 1$,

т. е. $1369\,A = 3090\,B+1$.

Такимъ образомъ мы находимъ, что 1369-е кратное отъ 6259 будетъ то искомое кратное, которое превышаетъ на 1 какое нибудь кратное отъ 2773.

Если теперь мы пожелали бы отыскать первое кратное отъ B, превышающее на 1 какое нибудь кратное отъ A, то достигнемъ этого при помощи замѣтки, сдѣланной нами въ самомъ началѣ этого примѣчанія; получимъ:

$$(6259-3090)\,B = (2773-1369)\,A+1$$
$$3169\,B = 1404\,A+1.$$

Возьмемъ еще $A=1007$, $B=211$ и $R=10$.

A	B	C	D	E
	4	1	3	2
1007	211	163	48	19
163	48	19	10	

Два послѣднія дѣленія даютъ:

$$2\,E = 1\,D - 10,$$
$$3D + E = C;$$

поэтому $(2.3+1)\,D = 2C+10$

или $7D = 2C+10$

затѣмъ имѣемъ $1\,C + D = B$;

поэтому $(7.1+2)C = 7\,B - 10$

или $9\,C = 7\,B - 10$;

наконецъ имѣемъ $4B + C = A$,

откуда $(9.4+7)B = 9A+10$

или $43)B = 9A+10$;

отсюда заключаемъ, что $(211-9)A = (1007-43)\,B+10$

или $202\,A = 964\,B+10$.

Вычисленія, которыя мы дѣлали надъ частными отъ послѣдовательныхъ дѣленій, чтобы получить остатокъ R, могутъ быть замѣнены для краткости другимъ вычисленіемъ, при помощи слѣдующаго простаго правила: *надо написать сперва въ одинъ рядъ всѣ частныя, какъ это указано ниже, затѣмъ образовать второй рядъ, начиная съ 1, которую въ этомъ ряду пишутъ правѣе послѣдняго частнаго; остальныя числа составляются черезъ послѣдовательныя умноженія соотвѣт-*

ствующихъ чиселъ перваго ряда на числа втораго, лежащаго вправо отъ перваго числа, и прибавляя сюда число, лежащее вправо отъ этого множителя,

2,	3,	1,	8,	39,	
3090,	1369,	352,	313,	39,	1.

Согласно этому правилу сперва умножаютъ 39 на 1, и, такъ какъ справа отъ 1 нѣтъ чиселъ, то второе число втораго ряда и будетъ 39. Затѣмъ 8 умножаютъ на 39 и прибавляютъ 1, что составитъ 313; далѣе умножаютъ 1 на 313 и прибавляютъ 39, что составитъ 352; потомъ умножаютъ 3 на 352 и прибавляютъ 313, и это дастъ 1369; наконецъ 2 умножаютъ на 1369, прибавляютъ 352 и получаютъ 3090. *Первое число 3090 есть множитель* B, *а второе число 1369—множитель* A *въ уравненіи*

$$\dot{A} = \dot{B} + 1, \text{ или въ уравненіи } \dot{A} = \dot{B} - 1.$$

Первое уравненіе имѣетъ мѣсто, когда всѣхъ дѣленій нечетное число, какъ въ первомъ примѣрѣ, а второе, когда дѣленій четное число, какъ во второмъ примѣрѣ.

Вотъ еще нѣсколько примѣровъ:

1) Найти первое кратное 4954, которое превышаетъ на 1 какое нибудь кратное отъ 7.

	707	1	2
4954	7	5	2
54	2	1	
5			

Частныя 707, 1, 2
2123, 3, 2, 1;

слѣдовательно $3.4954 = 2123.7 + 1.$

2) Найти наименьшее кратное отъ 3741, которое превышало бы на 6 какое нибудь кратное отъ 1530.

	2	2	4	18
3741	1530	681	168	9
681	168	9	78	
			6	

Частныя 2, 2, 4, 18,
401, 164, 73, 18, 1.

Такъ какъ всѣхъ дѣленій четное число,

$$164.3741 = 401.1530 - 6;$$

и такъ какъ общее наименьшее кратное число отъ 3741 и 1530 равно 1247.1530 или 510.3741, получимъ

$$(510 - 164)\ 3741 = (1247 - 401)\ 1530 + 6$$

или $$346.3741 = 846.1530 + 6$$

3) Найти первое кратное отъ 3907853, которое превышало бы на 1 какое нибудь кратное отъ 331087.

Найдемъ

$$61224.3907853 = 722633.331087 + 1.$$

Тотъ случай, когда R не находится между остатками, легко сводится къ предъидущему; потому что, во первыхъ, если мы найдемъ остатокъ r, на который дѣлится R, то можно будетъ вычислить

$$mA = nB + r,$$

а затѣмъ, умножая обѣ части уравненія на q—частное отъ дѣленія R на r, получимъ:

$$mqA = nqB + R,$$

которое уравненіе должно упростить, если mqA не менѣе общаго наименьшаго кратнаго отъ A и B.

Примѣръ. Требуется отыскать ближайшее кратное отъ 609, которое превышало-бы на 24 какое нибудь кратное отъ 402.

	1	1	1
609	402	207	195
207	195	12	

1, 1, 1

Частныя 3, 2, 1, 1,

Имѣемъ $2.609 = 3.402 + 12;$

а потому $4.609 = 6.402 + 24.$

Если имѣются числа первыя между собою, то иногда приходится продолжать дѣленія, пока не получится остатка 1.

Примѣръ. Требуется отыскать кратное 673, которое превышаетъ на 23 какое нибудь кратное 43.

	15	1	1	1	6
673	43	28	15	13	2
243	15	13	2	1	
28					

15, 1, 1, 1, 6,

313, 20, 13, 7, 6, 1,

Такимъ образомъ $20.673 = 313.43 + 1;$

слѣдовательно $23.20.673 = 23.313.43 + 23$

или $460.673 = 7199.43 + 23;$

но $460 = \dot{\overline{43}} + 30,$

и $7199 = \dot{\overline{673}} + 469;$

поэтому можно первое уравненіе обратить въ

$$30.673 = 469.43 + 23.$$

Замѣчаніе. Извѣстно, что, если есть общее наименьшее кратное нѣсколькихъ чиселъ A, B, C, то $\overline{A}, \dot{\overline{B}}, \overline{C} = \dot{\overline{M}}$; а потому всегда можно удовлетворить уравненіямъ

$$\dot{N} = \overline{A, \dot{B}, C} + R,$$
$$\overline{A, \dot{B}, C} = \dot{N} + R,$$
$$\overline{A, \dot{B}, C} = \overline{N, \dot{P}, Q} + R.$$

ПРИМѢЧАНІЕ III.

Найти число, которое отъ дѣленія на данныя числа дастъ назначенныя остатки.

Предположимъ сначала, что имѣются только два дѣлителя a и b и что должны получиться остатки p и q. Искомое число одинаково можетъ быть выражено черезъ $\dot{a}+p$ и черезъ $\dot{b}+q$; поэтому должно получить $\dot{b}+q=\dot{a}+p$; и слѣдовательно

$$\dot{b}=\dot{a}+(p-q) \text{ или } \dot{b}=\dot{a}-(q-p),$$

смотря потому будетъ ли p болѣе или менѣе q. Такимъ образомъ вопросъ сводится къ тому, чтобы отыскать кратное отъ b, которое равнялось бы какому нибудь кратному отъ $a+(p-q)$ или $-(q-p)$, т. е. къ задачѣ, разрѣшенной нами въ примѣчаніи II.

Положимъ, нужно найти число, которое отъ дѣленія на 117 дастъ въ остаткѣ 29, а раздѣленное на 83, дастъ остатокъ 33.

Мы должны получить $\dot{\overline{83}}+33=\dot{\overline{117}}+29$ или $\dot{\overline{83}}=\dot{\overline{117}}-4$.
Вотъ вычисленія:

	1	2	2
117	83	34	15
34	15	4	

Такъ какъ получается остатокъ 4, можно ограничиться дѣлителями 1, 2, 2 (примѣч. II):

1, 2, 2
5, 2, 1.

Такимъ образомъ $5.117=\dot{\overline{83}}+4$ или $\dot{\overline{83}}=5.117-4$;
и искомое число будетъ $5.117+29$ или 614.

Возьмемъ теперь три дѣлителя a, b, c, и остатки равные p, q и r. Сперва отыщемъ число, которое удовлетворитъ уравненію:

$$\dot{b}+q=\dot{a}+p,$$

какъ и въ случаѣ съ двумя дѣлителями. Пусть это число будетъ $ma+p$; если отъ дѣленія на c но не дастъ остатка r, нужно его измѣнить такимъ образомъ, чтобы оно удовлетворило этому условію, но вмѣстѣ съ тѣмъ продолжало бы давать остатки p и q при дѣленіи его на a и на b. Это значитъ, что нужно его увеличить на общее кратное отъ a и b; поэтому возьмемъ M наименьшее общее кратное число отъ a и b, и затѣмъ сдѣлаемъ необходимыя вычисленія, чтобы удовлетворить уравненію

$$\dot{c}+r=\dot{\mathrm{M}}+ma+p$$
$$\dot{c}=\dot{\mathrm{M}}+ma+p-r.$$

Положимъ, напримѣръ, надо найти наименьшее число, которое отъ дѣленія на 67, 15 и 7, дастъ остатки 10, 13 и 5. Возьмемъ сначала уравненіе

$$\dot{\overline{15}}+13=\dot{\overline{67}}+10 \qquad (1)$$

или
$$\dot{\overline{15}} = \dot{\overline{67}} - 3$$

	4	2
67	15	7
7	1	

4, 2

2, 1

имѣемъ
$$2.67 = \dot{\overline{15}} - 1;$$
слѣдовательно
$$13.67 = \dot{\overline{15}} + 1;$$
и
$$39.67 = \dot{\overline{15}} + 3;$$

Наименьшее общее кратное число отъ 67 и 15 будетъ 67×15 или 1005, и мы найдемъ $39 = \dot{\overline{15}} + 9$; слѣдовательно послѣднее уравненіе можетъ быть замѣнено черезъ

$$9.67 = \dot{\overline{15}} + 3;$$

и отсюда мы заключаемъ что первое число, вытекающее изъ уравненія (1)—$9.67 + 10$ или 613; а остальныя заключаются въ формулѣ $\dot{\overline{1005}} + 613$.

Такъ что, взявъ третьяго дѣлителя, получимъ

$$\dot{\overline{7}} + 5 = \dot{\overline{1005}} + 613 \qquad (2)$$

или
$$\dot{\overline{7}} = \dot{\overline{1005}} + 608.$$

	143
1005	7
30	
25	
4	

Такъ какъ остатокъ 4 получается при первомъ-же дѣленіи, то не зачѣмъ идти дальше

$$1005 = \dot{7} + 4;$$
слѣдовательно
$$\dot{7} = 6.1005 + 4$$
и
$$\dot{7} = 152.6.1005 + 608;$$

наименьшее общее кратное отъ 1005 и 7 будетъ 1005×7, и мы найдемъ 152×6 или $912 = \dot{7} + 2$; а потому послѣднее уравненіе можно замѣнить черезъ

$$\dot{7} = 2.1005 + 608,$$

и мы отсюда заключаемъ, что отыскиваемое число есть

$$2.1005 + 613 \text{ или } 2623.$$

Такимъ же образомъ должно поступать, сколько бы ни было дѣлителей.

Положимъ, напримѣръ, надо отыскать наименьшее число, которое отъ дѣленія на 47, 102, 140 и 183, дастъ остатки 30, 63, 99 и 9.

Возьмемъ сначала два дѣлителя 47 и 102, общее наименьшее краткое которыхъ равно 47×102 или 4794. Мы должны получить

$$\dot{\overline{47}} + 30 = \dot{\overline{102}} + 63 \qquad (1)$$

или
$$\dot{\overline{47}} = \dot{\overline{102}} + 33.$$

	2	5	1
102	47	8	7
8	7	1	

2, 5, 1

6, 1, 1

Такимъ образомъ
$$6.102 = \dot{\overline{47}} + 1;$$
слѣдовательно
$$\dot{\overline{47}} = 41.102 + 1,$$

и $$\dot{\overline{47}} = 33.41.102 + 33;$$

но мы имѣемъ 33.41 или $1353 = \dot{\overline{47}} + 37$;
слѣдовательно послѣднее уравненіе можно замѣнить черезъ

$$\dot{\overline{47}} = 37.102 + 33;$$

и отсюда мы заключаемъ, что первое число, которое получится изъ уравненія (1), будетъ $37.102 + 63$ или 3837; а остальныя заключаются въ формулѣ

$$\dot{\overline{4794}} + 3837.$$

Когда возьмемъ третьяго дѣлителя 14, то получимъ

$$\dot{\overline{140}} + 99 = \dot{\overline{4794}} + 3837 \qquad (2)$$

или $$\dot{\overline{140}} = \dot{\overline{4794}} + 3738$$

	34	4	8
4794	140	34	4
594	4	2	
34			

34, 4, 8
33, 8, 1

Такъ что $$33.4794 = \dot{\overline{140}} + 2;$$

слѣдовательно $$\dot{\overline{140}} = 107.4794 + 2$$

и $$\dot{\overline{140}} = 1869.107.4794 + 3738;$$

наименьшее общее кратное число отъ 140 и 4794 будетъ 70×4794 или 335580, и мы найдемъ

$$1869.107 \text{ или } 199983 = \dot{\overline{70}} + 63;$$

слѣдовательно послѣднее уравненіе можетъ быть замѣщено черезъ

$$\dot{\overline{140}} = 63.4794 + 3738,$$

и отсюда мы заключаемъ, что первое число, вытекающее изъ уравненія (2), будетъ $63.4794 + 3837$ или 305859; а остальныя заключены въ формулѣ

$$\dot{\overline{335580}} + 305859.$$

Поэтому, если мы возьмемъ четвертаго дѣлителя 183, то получимъ

$$\dot{\overline{183}} + 9 = 335580 + \dot{\overline{305859}} \qquad (3)$$

или $$\dot{\overline{183}} = \dot{\overline{335580}} + 305850$$

	1833	1	3
335580	183	141	42
1525	42	15	
618			
690			
141			

1833, 1, 3,
4, 3, 1,

Такимъ образомъ

$$4.335580 = \dot{\overline{183}} + 15;$$

поэтому $$\dot{\overline{183}} = 179.335580 + 15$$

и $$\dot{\overline{183}} = 20390.179.335580 + 305850.$$

Общее наименьшее кратное чиселъ 183 и 335580 есть 61.335580; и мы получимъ

$$20390.179 \text{ или } 3649810 = \dot{\overline{61}} + 58;$$

поэтому послѣднее уравненіе можетъ быть замѣнено черезъ

$$\dot{\overline{183}} = 58.335580 + 305850;$$

откуда мы заключаемъ, что отыскиваемое число равно

$$58.335580 + 305859 \text{ или } 19769499.$$

ПРИМѢЧАНІЕ IV.

1) *Если подъ числами* 1, 2, 3, *написать различныя между собою числа* a, b, c, *всѣми возможными способами*

1, 2, 3;	1, 2, 3;	1, 2, 3;
a, b, c;	a, c, b;	b, a, c;
1, 2, 3;	1, 2, 3;	1, 2, 3;
c, a, b;	b, c, a;	c, b, a;

и затѣмъ сложить произведенія, которыя получатся отъ умноженія чиселъ a, b, c *порознь на числа, стоящія надъ ними, то шесть суммъ, получившихся такимъ образомъ:*

$$a + 2b + 3c,$$
$$a + 2c + 3b,$$
$$b + 2a + 3c,$$
$$c + 2a + 3b,$$
$$b + 3c + 3a,$$
$$c + 2b + 3a,$$

будутъ всѣ различны между собою, если только среднее число b *не равно полу-суммѣ двухъ другихъ.*

Прежде всего, если $b = \frac{a+c}{2}$, нужно удостовѣриться, что сумма $a + 2c + 3b$ и $b + 2a + 3c$ равны между собою, и что также равны суммы

$$c + 2a + 3b \text{ и } b + 2c + 3a.$$

Затѣмъ убѣждаются, что если a меньшее число и c наибольшее, то шесть суммъ, первоначально написанныхъ, постепенно уменьшаются, если $b > \frac{a+c}{2}$; но если $b < \frac{a+c}{2}$, суммы эти, постепенно уменьшаясь, могутъ быть расположены въ такомъ порядкѣ:

$$a + 2b + 3c,$$
$$b + 2a + 3c,$$
$$a + 2c + 3b,$$
$$b + 2c + 3a,$$
$$c + 2a + 3b,$$
$$c + 2b + 3a.$$

Замѣчаніе. Вообще, если хотятъ отыскать, какія числа m, n, p,... нужно помѣстить подъ числами a, b, c,... чтобы, переставляя первыя подъ вторыми, во всѣхъ возможныхъ сочетаніяхъ, получились различныя между собою суммы:

$$am + bn + cp + \ldots$$
$$an + bm + cp + \ldots$$
$$am + bp + cn + \ldots, \text{ и т. д.},$$

должно составить сначала эти различныя суммы и сравнять ихъ попарно; это дастъ намъ извѣстное число отношеній между m, n, p,... затѣмъ надо подбирать искомыя числа такимъ образомъ, чтобы они не удовлетворялы полученнымъ отношеніямъ. Между числами m, n, p,... всегда будетъ одно или нѣсколько чиселъ, величина которыхъ произвольна.

Напримѣръ, если числа a, b, c,... суть 1, 2, 3, 4, а числа другаго ряда 1, 2, p, q, мы найдемъ, что необходимо имѣть $p > 4$; и, если мы возьмемъ $p = 5$, то

увидимъ, что необходимо взять $q > 14$. Такимъ образомъ числа втораго ряда будутъ 1, 2, 5, 15.

Подобныя вычисленія довольно многосложны, а потому мы приведемъ здѣсь общее рѣшеніе этой задачи, которое избавляетъ отъ необходимости дѣлать эти вычисленія.

Рѣшеніе это вытекаетъ изъ слѣдующей теоремы:

2. Даны числа

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad 4 \ldots\ldots l,$$

между которыми самое большое l; если написать подъ этими числами различныя степени какого нибудь числа N, равнаго или большаго l,

$$N^p, \ldots N^q, \ldots N^r, \ldots N^s, \ldots$$

затѣмъ умножить каждое изъ послѣднихъ чиселъ на число, подъ которымъ оно написано и взять сумму произведеній, какъ напримѣръ,

$$bN^p + dN^q + gN^r + iN^s, \ldots$$

то, съ измѣненіемъ порядка чиселъ втораго ряда, величина этой суммы будетъ измѣняться, и такихъ различныхъ суммъ получится столько, сколько можно сдѣлать перестановокъ съ степенями числа N.

Положимъ, что одна изъ перестановокъ даетъ сумму

$$b'N^p + d'N^q + g'N^r + i'N^s + \ldots,$$

и что члены этого многочлена расположены въ убывающемъ порядкѣ.

Если мы возьмемъ разность этихъ двухъ суммъ, то получимъ выраженіе въ видѣ

$$b''N^p \pm d''N^q \pm g''N^r \pm i''N^s \ldots;$$

и если всѣ члены, слѣдующіе за первымъ, будутъ со знакомъ —, то эта разность равна

$$b''N^p - d''N^q - g''N^r - i''N^s - \ldots;$$

въ противномъ же случаѣ она болѣе этой послѣдней величины; и мы утверждаемъ, что эта величина положительная.

Въ самомъ дѣлѣ, совокупность двухъ первыхъ членовъ сводится къ $(b''N^{p-q} - d'')N^q$, величины положительной, потому-что d'', разность коэффиціентовъ d и d' (изъ которыхъ большій не можетъ превышать l) менѣе l, а слѣдовательно менѣе и N. Такъ что совокупность двухъ первыхъ членовъ превращается въ положительную величину δN^q. Присоединяя слѣдующее число $-g''N^r$, можно доказать точно также, что должно получиться положительное число γN^r, и т. д. со всѣми членами этой разности. Далѣе изъ того, что разность двухъ суммъ не можетъ быть равна нулю, мы заключаемъ, что всѣ полученныя суммы будутъ различны между собою.

Замѣчаніе. Если мы возьмемъ m чиселъ 1, 2, 3,... и n степеней N, то послѣднія можно подписать подъ первыми столькими различными способами, сколько вообще можно сдѣлать перестановокъ, изъ m предметовъ, взятыхъ по n въ каждомъ соединеніи; а если число различныхъ степеней отъ N будетъ также m, то соединеній будетъ столько, сколько возможно перестановокъ съ m предметами.

КОНЕЦЪ.

КНИГОПРОДАВЦЕМЪ-ТИПОГРАФОМЪ М. О. ВОЛЬФОМЪ ИЗДАНО:

СОБРАНІЕ
КАРТОЧНЫХЪ ПАССЬЯНСОВЪ.

ПЕРЕВОДЪ СЪ ФРАНЦУЗСКАГО.

Съ 20 литографированными рисунками.

Въ 8 д. л. Спб. 1873 г. Ц. 1 р. 50 к.

СОДЕРЖАНІЕ.

Маленькіе пакеты. — Свадьба червоннаго короля съ червонною дамою.—Новая республиканка.—Четыре ряда.— Султанъ. — Резервные пакеты. — Салическій законъ или трибуналъ. — Картина. — Пеппи младшая. — Сосчитанныя восемь. — Конгрессъ или дворянство. —Пирамида.— Конститюсіонель.—Шесть рядовъ съ резервомъ или еще наполеоновскій пассьянсъ. — Четырнадцать. — Четыре дамы или кадриль.— Циферблатъ.— Полукругъ. — Герцогиня де Люинъ.— Грабужъ.— Ротонда. — Одиннадцать.— Девять.— Жаба. — Малый пассьянсъ. — Котильонъ. — Добрая Луиза. — Дамскій пассьянсъ. — Брюнетка или блондинка. — Квадратъ А.—Звѣзда.—Двойные пакеты.—Игра мастей.— Ненасытный.—Вѣтряная мельница.— Швейцарка. — Блокада.— Строй или блокада.—Республиканка В.— Республиканка С. — Странствующая карта. — Циферблатъ безъ валета.—Бонапартовскіи, или пассьянсъ о. Св. Елены.— Кабала.— Шесть рядовъ безъ резерва.— Многочисленные марьяжи по разсчету.—Александръ и Наполеонъ.— Семь спящихъ. — Полумѣсяцъ. — Мельница.— Красавица Люція. — Нивернэзъ.— Кастелянша. — Пеппи-капризница.— Наполеоновскій пассьянсъ. — Квадратъ В. — Дѣды.— Неустрашимыя дамы. — Близнецы. — Принцесса. — Четыре угла.—Плѣнники А.— Пятнадцать.—Плѣнники В.—Пассьянсъ безъ хитрости. — Радуга. — Мальтійскій крестъ. — Свободныя мѣста.—Часы.—Обрученные.—Семейство червей.—Союзники. — Непрерывный призывъ.— Чета въ облической линіи.—Бабетта.—Симпатія.—Пѣтухъ въ своей деревнѣ.—Пасхальное яйцо.—Урокъ ариѳметики.—Четыре сестры милосердія. — Угадать число или стоимость картъ.—Угадать стоимость нижнихъ картъ трехъ пакетовъ.—Новый Наполеоновскій пассьянсъ.